ALLGEMEINE
THEORIE DER MONOCHROMATISCHEN ABERRATIONEN
UND IHRE NÄCHSTEN ERGEBNISSE
FÜR DIE OPHTHALMOLOGIE

VON

ALLVAR GULLSTRAND.

(Mitgetheilt der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Upsala am 21 Sept. 1900).

UPSALA 1900,
DRUCK DER AKADEMISCHEN BUCHDRUCKEREI,
EDV. BERLING.

Inhalt.

Einleitung.

Im Gebiete der Ophtalmologie wird zur Zeit fleissig mit der Aberration des menschlichen Auges gearbeitet. Da aber die Gesetze der Aberrationen bisher nur für solche optische Systeme bekannt sind, die aus centrirten Umdrehungsflächen bestehen, und da auf der anderen Seite bei den betreffenden Untersuchungen Thatsachen festgestellt und Resultate verwerthet werden, welche die Abweichung der Form der brechenden Flächen von derjenigen einer Umdrehungsfläche beweisen, bezw. auf dieser Abweichung beruhen, so leuchtet es ein, dass der solide Grund dem Lehrgebäude mangelt, so lange nicht die Gesetze der Aberrationen im allgemeinen Strahlenbündel bekannt sind. Diese Lücke einigermassen zu füllen, ist die Aufgabe der vorliegenden Arbeit.

Wenn der Begriff der monochromatischen Aberrationen eines Strahlenbündels im weitesten Sinne gefasst wird, also mit dem der Abweichung von der Homocentricität identisch ist, so umfasst er verschiedene Werthe, welche zu den verschiedenen Potenzen von der Öffnung des Strahlenbündels proportional sind.

Für den Fall, dass nur die Potenzen erster und zweiter Ordnung berücksichtigt werden, ist die allgemeine Constitution des Strahlenbündels durch die Untersuchungen von STURM, KUMMER u. A. bekannt, und es sind dadurch die *Gesetze des Astigmatismus* gegeben. Bei Mitnahme auch der dritten Potenz erhält man in erster Annäherung die *Gesetze der Asymmetrien.* Diese Gesetze sowie die klinische Bedeutung der fraglichen Anomalien habe ich in früheren Arbeiten entwickelt. Endlich ergeben sich bei Berücksichtigung der Grössen, welche zur vierten



Potenz der Öffnung des Strahlenbündels proportional sind, die *Gesetze der Aberrationen,* wenn wir hierunter solche Abweichungen verstehen, welche von derselben Grössenordnung wie die gewöhnlich unter dem Begriffe der »sphärischen Aberration» verstandenen sind. Dass bei Strahlenbündeln von solcher Öffnung, wie sie im Auge vorkommen, die Kenntniss von Abweichungen noch höherer Ordnung von Nutzen sein würde, unterliegt keinem Zweifel, aber ob brauchbare, allgemeine Gesetze für diese Abweichungen entwickelt werden können, scheint mehr als zweifelhaft. Jedenfalls habe ich nur mit der erwähnten Beschränkung die Theorie der Aberrationen entwickelt.

Hierbei habe ich den schon früher von mir eingeschlagenen Weg weiter befolgt, nämlich das Strahlenbündel in Zusammenhang mit der Wellenfläche untersucht. Nachdem ich in den Ableitungen der Hauptkrümmungen und der geodätischen Krümmungen der Hauptkrümmungslinien in Bezug auf die Bogenlängen dieser geeignete Grössen gefunden hatte, um die Aberrationen des Strahlenbündels zu bestimmen, war es also die erste Aufgabe, die *Geometrie des Flächenelementes* und der Evolute mit Hilfe dieser Grössen darzustellen, wobei in der Diskussion der Fälle, wo die verschiedenen Ableitungen verschwinden, die Canalflächen wegen ihrer Bedeutung für die Frage von der Existenz reeller Brennlinien im Strahlenbündel besonders berücksichtigt werden mussten, und die geometrische Bedeutung der fraglichen Werthe für die Osculation vierter Ordnung mit Flächen und Curven zweiten Grades bei Vorhandensein von zwei Symmetrieebenen illustrirt werden konnte.

Nach diesen geometrischen Untersuchungen konnte die allgemeine *Constitution des astigmatischen Strahlenbündels* festgestellt werden, wobei unter Anwendung von Grössen, welche, allen Wellenflächen gemeinsam, das Strahlenbündel als solches charakterisiren, zunächst die Normalengleichungen und durch diese die dem Begriffe der »lateralen Aberration» im allgemeinen Falle entsprechenden Grössen hergeleitet wurden, dann nach Untersuchung der Bedingungen, unter welchen sich zwei Strahlen schneiden, die dem Begriffe der »longitudinalen Aberration» entsprechenden Grössen hergeleitet sowie die verschiedenen Querschnitte und die Furchen an der Oberfläche der Strahlenbündel untersucht wurden, um schliesslich nach einer Diskussion der verschiedenen Formen der allgemeinen Strahlenbündel die Beziehung zwischen der Wirklichkeit und der geläufigen Hypothese vom STURM'schen Conoide darstellen zu können.

Nach ähnlichem Plane hatte ich, um die Strahlenbündel ohne Astigmatismus kennen zu lernen, zunächst *die Kreispunkte der Flächen* näher zu untersuchen. Auf diesem virginellen Felde mussten zunächst die Gesetze der in einen Kreispunkt eintretenden Krümmungslinien gefunden, und die diesem Falle eigenthümlichen Bedingungen, unter welchen sich zwei Normalen schneiden, untersucht werden, wonach für eine durch den Kreispunkt gehende abwickelbare Normalfläche die geometrischen Eigenschaften der Kantlinie und der zweiten Berührungslinie mit der Evolute zu ermitteln waren. Es konnte dann unter Hinzuziehung des LIOUVILLE'schen Gesetzes die Untersuchung der Krümmungslinienfigur erfolgen und die Diskussion der verschiedenen Kreispunktstypen bezüglich dieser und der Evolute gegeben werden. Daneben war es aber für die Application auf die Strahlenbrechung im Auge auch nothwendig, die Flächenelemente mit unendlich kleiner Differenz der Hauptkrümmungen und das Vorkommen von zwei oder mehreren Kreispunkten in unendlich kleiner Entfernung von einander näher zu untersuchen.

Aus praktischen Gründen habe ich bei diesen Untersuchungen der Kreispunkte eine andere Nomenclatur angewandt als die in den modernen Untersuchungen über die singulären Punkte der durch Differentialgleichungen bestimmten Curven vorkommende, da mir diese bei Vorhandensein von zwei Systemen der Curven etwas schwerfällig erschien.

Nach dieser Untersuchung konnte *die Constitution des nicht astigmatischen Strahlenbündels* allgemein untersucht werden, wobei, nach Entwickelung der Normalengleichungen und Feststellung der Beziehung zur »lateralen» und »longitudinalen» Aberration, die Constitution der Strahlenconoide mit ihren Doppellinien gefunden wurde, und die verschiedenen Formen der fraglichen Strahlenbündel diskutirt werden konnten. Schliesslich war ähnlich wie beim Flächenelemente der Fall zu untersuchen, wo die Differenz der Hauptkrümmungen von derselben Grössenordnung wie die Öffnung des Strahlenbündels ist, wobei eine volle Uebereinstimmung zwischen den deducirten Eigenschaften der Strahlenbündel und den bei experimenteller Erzeugung dieser durch Brechung in sphärocylindrischen Gläsern mit oder ohne Schiefstellung gefundenen constatirt werden konnte.

Es war weiter die *Brechung eines Strahlenbündels* zu untersuchen, um die Formeln angeben zu können, welche die fraglichen Eigenschaften des gebrochenen Strahlenbündels aus denen des einfallenden und der

brechenden Fläche herzuleiten ermöglichen, und es musste hierbei — um eine in der Ophthalmologie gebräuchliche Untersuchungsmethode der Aberration des Auges kritisch beleuchten zu können — die Correlation von Liniensystemen auf Querschnitten des einfallenden und des gebrochenen Strahlenbündels berücksichtigt werden.

Um endlich *die nächsten Ergebnisse der entwickelten Theorie im Gebiete der Ophthalmologie* darzustellen, habe ich die Relation zwischen den das im Auge gebrochene Strahlenbündel bestimmenden Grössen und der Refraction des Auges bei minimalem, verschiedene Theile des Strahlenbündels innerhalb des Pupillargebietes abgrenzendem Diaphragma hergeleitet. Dann konnte unmittelbar durch die Untersuchung des Auges mit einem leuchtenden Punkte die Constitution des im Auge gebrochenen Strahlenbündels untersucht werden, was bisher nicht geschehen konnte, da die Grösse der Aberrationswerthe und der Pupillenöffnung im Verhältniss zur Brennstrecke bedingt, dass bei den gewöhnlichen Graden von physiologischem und pathologischem Astigmatismus zwei Kreispunkte auf der von der Pupille abgegrenzten Partie der Wellenfläche des gebrochenen Strahlenbündels vorhanden sind, so dass auch nur die entfernteste Ähnlichkeit mit dem Typus des STURM'schen Conoides ausgeschlossen ist, und da die Resultate der schon ausgeführten Untersuchungen ohne die hier entwickelte Theorie nicht gedeutet werden konnten. Das Gleiche gilt von dem Wesen der um einen hellen Punkt sichtbaren Sternfigur. Nach Angabe einer Methode, die das im Auge gebrochene Strahlenbündel bestimmenden Grössen wirklich zu messen, habe ich dann die übrigen Untersuchungsmethoden der Aberration des Auges kritisch beleuchtet sowie die Frage von der Relation zwischen Accommodationsmechanismus und Aberration berührt, ohne dass die Darstellung in diesen Fragen auf Vollständigkeit Anspruch machen könnte, da einem solchen Anspruche nicht innerhalb des Rahmens dieser Arbeit genügt werden konnte. Aus derselben Ursache habe ich die Ergebnisse der Theorie für die Relation der Hornhautrefraction zu den Aberrationen des Auges hier nicht berührt.

Juli 1900.

---

1. Das allgemeine Flächenelement.

Bei der Untersuchung einer Fläche in der Nähe eines gegebenen Punktes ergiebt sich zunächst, dass eine Ebene, welche die Normale der Fläche im gegebenen Punkte enthält, von der Fläche eine Curve abschneidet, deren Krümmung im allgemeinen Falle mit der Orientirung der genannten Ebene wechselt; und zwar in der Weise, dass diejenigen Normalschnitte, welche die grösste und die kleinste Krümmung haben, auf einander senkrecht stehen. Diese beiden Hauptkrümmungen geben uns also den Ausdruck für die Form der Fläche im gegebenen Punkte. Um nun die Fläche in der Nähe dieses Punktes kennen zu lernen, können wir so verfahren, dass wir untersuchen, wie sich diese Hauptkrümmungen verändern und wie sich die Orientirung der Hauptnormalschnitte verändert, wenn wir von dem gegebenen Punkte auf einem nahe gelegenen übergehen. Die letzterwähnte Aufgabe führt auf die Untersuchung der Projektionen der Hauptkrümmungslinien auf die Tangentialebene also der geodätischen Krümmung dieser Linien. Die erstgenannte wird durch die Herleitung der Ableitungen der Hauptkrümmungen gelöst werden. Hierbei werden wir die Ableitung in Bezug auf zwei unabhängige Variabele $s_{,}$ und $s_{,,}$ ausführen, welche wir so wählen, dass die Coordinatenlinien überall mit den Hauptkrümmungslinien zusammenfallen, und dass längs den beiden sich im gegebenen Punkte kreuzenden Hauptkrümmungslinien $s_{,}$ bezw. $s_{,,}$ mit den bezüglichen Bogenlängen identisch sind. Wenn also $d\sigma_{,}$ bezw. $d\sigma_{,,}$ die Bogenelemente der Hauptkrümmungslinien allgemein bezeichnen, so haben wir im allgemeinen Falle $d\sigma_{,} = ds_{,}$ nur, wenn $s_{,,} = 0$, und $d\sigma_{,,} = ds_{,,}$ nur, wenn $s_{,} = 0$ ist. Wir bezeichnen die Hauptkrümmungen der Fläche

mit $\frac{1}{\varrho_{,}}$ bezw. $\frac{1}{\varrho_{,,}}$ und die geodätischen Krümmungen der $s_{,}$- bezw. $s_{,,}$-Linie mit $\frac{1}{R_{,}}$ bezw. $\frac{1}{R_{,,}}$. Ausserdem führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$\frac{1}{\varrho_{,}} = D_{,} \quad \frac{1}{\varrho_{,,}} = D_{,,}$$

$$\frac{dD_{,}}{d\sigma_{,}} = U \quad \frac{dD_{,}}{d\sigma_{,,}} = V \quad \frac{dD_{,,}}{d\sigma_{,}} = W \quad \frac{dD_{,,}}{d\sigma_{,,}} = \mathfrak{W}$$

$$\frac{d^2D_{,}}{d\sigma_{,}^2} = \Phi' \quad \frac{d}{d\sigma_{,}}\frac{1}{R_{,}} = \Psi' \quad \frac{d^2D_{,}}{d\sigma_{,,}^2} = \Omega'$$

$$\frac{d^2D_{,,}}{d\sigma_{,}^2} = \Omega'' \quad \frac{d}{d\sigma_{,,}}\frac{1}{R_{,,}} = \Psi'' \quad \frac{d^2D_{,,}}{d\sigma_{,,}^2} = \Phi'' .$$

Mit diesen vom gewählten Coordinatensysteme vollkommen unabhängigen Werthen $D_{,} \ldots . \; U \ldots . \; \Phi' \ldots .$, welche rein geometrische Grössen darstellen, und die wir aus der Flächengleichung ermitteln werden, wollen wir jetzt die geometrischen Eigenschaften des Flächenelementes und der Evoluten untersuchen, so weit sie sich aus den Differentialquotienten bis zur vierten Ordnung ergeben, und so weit sie für den vorliegenden Zweck erforderlich sind.

Wir gehen hierbei von der Gleichungsform $z = f(xy)$ aus und bezeichnen die partiellen Differentialquotienten folgendermassen:

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

$$d^2z = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2$$

$$d^3z = u\,dx^3 + 3v\,dx^2dy + 3w\,dx\,dy^2 + \mathfrak{w}\,dy^3$$

$$d^4z = \partial^{40}dx^4 + 4\partial^{31}dx^3dy + 6\partial^{22}dx^2dy^2 + 4\partial^{13}dx\,dy^3 + \partial^{04}dy^4 .$$

Für den Uebergang auf die krummlinigen Coordinaten $s_{,} s_{,,}$ müssen wir zuerst die Differentialquotienten $\frac{\partial x}{\partial s_{,}} \ldots .$ u. s. w. kennen lernen. Da wir aber nur bis zur zweiten Ordnung diese Werthe brauchen, und da, wie mir scheint, die Darstellung um so einfacher gemacht werden kann, je weniger von der Lehre von krummlinigen Coordinaten mitgenommen wird, habe ich es vorgezogen, diese Werthe auf folgende Weise zu suchen.

Wenn wir den Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ für die erste Hauptkrümmungslinie mit λ bezeichnen, und die allgemeine Gleichung für die Orientirung der Hauptnormalschnitte

$$(1+p^2)s - pqr + \lambda[(1+p^2)t - (1+q^2)r] + \lambda^2[pqt - (1+q^2)s] = 0$$

differentiiren, indem wir x als unabhängige Variabele betrachten, so erhalten wir für das Coordinatensystem $p = q = s = 0$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{v}{r-t}$$

Da aber in diesem Coordinatensysteme $dx = ds_{,}$ und $dy = ds_{,,}$ ist, so ist, wenn $s_{,,}$ nicht variirt, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial s_{,}^2}$, und somit haben wir diesen Differentialquotienten ermittelt. In analoger Weise erhalten wir $\frac{\partial^2 x}{\partial s_{,,}^2}$. Dass $\frac{\partial^2 x}{\partial s_{,}^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial s_{,,}^2} = 0$ sein muss, wenn die Coordinatenachsen mit den Haupttangenten zusammenfallen, geht daraus hervor, dass für diese Hauptkrümmungslinien $ds_{,}$ bezw. $ds_{,,}$ die Bogenelemente sind. Es erübrigt also nur, die Werthe von $\frac{\partial^2 x}{\partial s_{,} \partial s_{,,}}$ und $\frac{\partial^2 y}{\partial s_{,} \partial s_{,,}}$ su ermitteln. Um in einwandsfreier Weise dieses thun zu können, entnehmen wir aus der Lehre von den krummlinigen Coordinaten die Bedingung dafür, dass sich die Coordinatenlinien überall unter rechten Winkeln schneiden:

$$\frac{\partial x}{\partial s_{,}} \cdot \frac{\partial x}{\partial s_{,,}} + \frac{\partial y}{\partial s_{,}} \cdot \frac{\partial y}{\partial s_{,,}} + \frac{\partial z}{\partial s_{,}} \cdot \frac{\partial z}{\partial s_{,,}} = 0$$

Die Differentiation dieser Gleichung ergiebt für das Coordinatensystem $p = q = s = 0$

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial s_{,} \partial s_{,,}} + \frac{\partial^2 y}{\partial s_{,}^2}\right) ds_{,} + \left(\frac{\partial^2 x}{\partial s_{,,}^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial s_{,} \partial s_{,,}}\right) ds_{,,} = 0$$

woraus, da $s_{,}$ und $s_{,,}$ unabhängige Variabele sind, und folglich die Coëfficienten von $ds_{,}$ und $ds_{,,}$ gleich Null sein müssen, die gesuchten Werthe erhellen. Nunmehr können wir also für $p = q = s = 0$ schreiben:

$$dx = ds_{,} \qquad dy = ds_{,,}$$

$$d^2x = -\frac{2v\,ds_{,}ds_{,,} + w\,ds_{,,}^2}{r-t} \qquad d^2y = \frac{v\,ds_{,}^2 + 2w\,ds_{,}ds_{,,}}{r-t}$$

Um Verwechselungen zwischen $ds_{,}$ bezw. $ds_{,,}$ und den allgemeinen Bogenelementen $d\sigma_{,}$, $d\sigma_{,,}$ der Hauptkrümmungslinien vorzubeugen, wollen wir diese näher untersuchen. Hier müssen wir wieder aus der Lehre von den krummlinigen Coordinaten den Satz heranziehen, dass

$$d\sigma_{,} = \sqrt{E} \,.\, ds_{,} \qquad d\sigma_{,,} = \sqrt{G} \,.\, ds_{,,}$$

ist, in welchen Ausdrüken

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial s_{,}}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s_{,}}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s_{,}}\right)^2$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial s_{,,}}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s_{,,}}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s_{,,}}\right)^2$$

ist. Durch Differentiation erhalten wir für $dx = ds_{,}$ und $dy = ds_{,,}$ da $\frac{\partial^2 x}{\partial s_{,}^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial s_{,,}^2} = 0$ ist:

$$d\,\frac{d\sigma_{,}}{ds_{,}} = \frac{dE}{2} = \frac{\partial^2 x}{\partial s_{,} \partial s_{,,}}\, ds_{,,} = -\,\frac{v\, ds_{,,}}{r - t}$$

$$d\,\frac{d\sigma_{,,}}{ds_{,,}} = \frac{dG}{2} = \frac{\partial^2 y}{\partial s_{,} \partial s_{,,}}\, ds_{,} = \frac{w\, ds_{,}}{r - t}$$

Hieraus folgt z. B., dass, während die Identität besteht

$$\frac{d}{d\sigma_{,}} \cdot \frac{dD_{,}}{d\sigma_{,}} = \frac{d^2 D_{,}}{d\sigma_{,}^2} = \frac{\partial^2 D_{,}}{\partial s_{,}^2} = \Phi'$$

wir anderseits haben:

$$\frac{\partial}{\partial s_{,,}} \cdot \frac{dD_{,}}{d\sigma_{,}} = \frac{\partial}{\partial s_{,,}} \frac{\frac{\partial D_{,}}{\partial s_{,}}}{\frac{d\sigma_{,}}{ds_{,}}} = \frac{\partial^2 D_{,}}{\partial s_{,} \partial s_{,,}} - \frac{\partial D_{,}}{\partial s_{,}} \cdot \frac{d}{ds_{,,}} \frac{d\sigma_{,}}{ds_{,}}$$

Es war nothwendig, hierauf aufmerksam zu machen, da z. B. $\frac{dD_{,}}{d\sigma_{,}}$ eine von dem Coordinatensystem unabhängige geometrische Grösse darstellt, während $\frac{\partial D_{,}}{\partial s_{,}}$ in unserem Coordinatensysteme nur für $s_{,,} = 0$ mit $\frac{dD_{,}}{d\sigma_{,}}$ identisch ist, falls U und v von Null verschieden sind.

Nunmehr können wir die Ableitungen der Hauptkrümmungswerthe aus folgenden bekannten Formeln suchen:

$$D_{,} + D_{,,} = H = \frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{\sqrt{(1+p^2+q^2)^3}}$$

$$D_{,}D_{,,} = K = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2}$$

Durch zweimalige Differentiation und Elimination von $dD_{,,}$ bezw. $d^2D_{,,}$ finden wir zuerst:

$$(D_{,} - D_{,,})dD_{,} = D_{,}dH - dK$$

$$(D_{,} - D_{,,})d^2D_{,} = D_{,}d^2H - d^2K + 2dD_{,}dD_{,,}$$

und, wenn wir dann die Werthe von H und K zweimal differentiiren und nachher $p = q = s = 0$ setzen:

$$H = r + t \qquad K = rt$$

$$dH = dr + dt \qquad dK = tdr + rdt$$

$$d^2H = d^2r + d^2t - (3r+t)dp^2 - (3t+r)dq^2$$

$$d^2K = td^2r + 2drdt + rd^2t - 2ds^2 - 4rt(dp^2 + dq^2)$$

Durch Einsetzen von diesen Werthen unter Berücksichtigung, dass $D_{,} = r$ bezw. $D_{,,} = t$ ist, erhalten wir:

$$dD_{,} = dr$$

$$d^2D_{,} = d^2r - 3r\,dp^2 - r\,dq^2 + \frac{2ds^2}{r-t}$$

nebst analogen Werthen für die zweite Hauptkrümmung.

Um die partiellen Differentialquotienten in Bezug auf $s_{,}$ und $s_{,,}$ zu finden, erinnern wir uns, dass

$$d^2r = \partial^{40}ds_{,}^2 + 2\partial^{31}ds_{,}ds_{,,} + \partial^{22}ds_{,,}^2 + ud^2x + vd^2y$$

ist. Für das Coordinatensystem $p = q = s = 0$ ergiebt sich also schliesslich:

$$D_{,} = r \qquad D_{,,} = t$$

$$U = u \qquad V = v \qquad W = w \qquad \mathfrak{U} = u$$

$$\Phi' = \frac{\partial^2 D_{,}}{\partial s_{,}^2} = \partial^{40} - 3r^3 + \frac{3v^2}{r-t} \qquad \Omega'' = \frac{\partial^2 D_{,,}}{\partial s_{,}^2} = \partial^{22} - r^2t - \frac{v(2v-u)}{r-t}$$



$$\frac{\partial^2 D_{,}}{\partial s_{,} ds_{,,}} = \partial^{31} - \frac{v(u-3w)}{r-t} \qquad \frac{\partial^2 D_{,,}}{\partial s_{,} \partial s_{,,}} = \bar{\partial}^{13} - \frac{w(3v-u)}{r-t}$$

$$\Omega' = \frac{\partial^2 D_{,}}{\partial s_{,,}^2} = \partial^{22} - r t^2 - \frac{w(u-2w)}{r-t} \qquad \Phi'' = \frac{\partial^2 D_{,,}}{\partial s_{,,}^2} = \partial^{04} - 3t^3 - \frac{3w^2}{r-t}$$

Aus der Art unserer Deduktion der Werthe $\frac{\partial^2 y}{\partial s_{,}^2}$ und $\frac{\partial^2 x}{\partial s_{,,}^2}$ geht unmittelbar hevor, dass diese die Krümmungen der Projektionen der Hauptkrümmungslinien auf die Tangentialebene d. h. ihre geodätischen Krümmungen repräsentiren, was wir durch folgende, von dem Coordinatensystem unabhängige Gleichungen zwischen rein geometrischen Grössen ausdrücken können:

$$\frac{1}{R_{,}} = \frac{V}{D_{,} - D_{,,}} \qquad \frac{1}{R_{,,}} = -\frac{W}{D_{,} - D_{,,}}$$

die wir ohne Weiteres nach $s_{,}$ und $s_{,,}$ differentiiren können. Es ergiebt sich

$$(D_{,} - D_{,,})\, d\frac{1}{R_{,}} + \frac{1}{R_{,}}(dD_{,} - dD_{,,}) = dV = \left(\frac{\partial^2 D_{,}}{\partial s_{,} \partial s_{,,}} - V\frac{d}{ds_{,}}\frac{d\sigma_{,,}}{ds_{,,}}\right) ds_{,} + \Omega' ds_{,,}$$

woraus wir, sowie aus der analogen Gleichung für die geodätische Krümmung der zweiten Hauptkrümmungslinie, einestheils für das Coordinatensystem $p = q = s = 0$ finden:

$$\Psi' = \frac{\partial}{\partial s_{,}}\frac{1}{R_{,}} = \frac{\frac{\partial^2 D_{,}}{\partial s_{,} \partial s_{,,}}}{D_{,} - D_{,,}} - \frac{UV}{(D_{,} - D_{,,})^2} = \frac{\partial^{31}}{r-t} - \frac{v(2u-3w)}{(r-t)^2}$$

$$\Psi'' = \frac{\partial}{\partial s_{,,}}\frac{1}{R_{,,}} = \frac{-\frac{\partial^2 D_{,,}}{\partial s_{,} \partial s_{,,}}}{D_{,} - D_{,,}} - \frac{WW}{(D_{,} - D_{,,})^2} = -\frac{\partial^{13}}{r-t} + \frac{w(3v-2u)}{(r-t)^2}$$

andererseits aber auch folgende von dem Coordinatensystem unabhängige Gleichungen erhalten:

$$\frac{d}{d\sigma_{,,}}\frac{1}{R_{,}} = \frac{\Omega'}{D_{,} - D_{,,}} - \frac{V(V-W)}{(D_{,} - D_{,,})^2}$$

$$\frac{d}{d\sigma_{,}}\frac{1}{R_{,,}} = -\frac{\Omega''}{D_{,} - D_{,,}} + \frac{W(U-W)}{(D_{,} - D_{,,})^2}$$

welche in Verbindung mit der aus den Werthen von Ω' und Ω'' leicht zu erhaltenden ebenso vom Coordinatensystem unabhängigen Gleichung:

$$\Omega' - \Omega'' = D_{,}D_{,,}(D_{,} - D_{,,}) - \frac{W(U - 2W) - V(2V - W)}{D_{,} - D_{,,}}$$

unmittelbar den bekannten Satz von LIOUVILLE[1] geben:

$$\frac{d}{d\sigma_{,,}}\frac{1}{R_{,}} + \frac{d}{d\sigma_{,}}\frac{1}{R_{,,}} = D_{,}D_{,,} + \frac{1}{R_{,}^2} + \frac{1}{R_{,,}^2}$$

Hiermit haben wir die Controle der bisherigen Deduktionen erhalten. Eine weitere solche wollen wir dadurch geben, dass wir die Werthe Ψ direkt aus der Gleichung der Hauptkrümmungslinien ermitteln. Da allgemein für eine ebene Curve, wenn $\frac{dy}{dx} = 0$ ist, $\frac{d}{dx}\frac{1}{\varrho} = \frac{d^3y}{dx^3}$ ist, so muss dies auch für die Projektion der Hauptkrümmungslinie auf der Tangentialebene gelten. Aus der schon angewendeten Gleichung für λ erhalten wir durch zweimalige Differentiation für $p = q = s = 0$ und $\lambda = 0$:

$$(r - t)d^2\lambda = d^2s - 2r\,dp\,dq - 2d\lambda(dr - dt)$$

welche Gleichung unter Berücksichigung, dass

$$d^2s = \partial^{31}dx^2 + 2\partial^{22}dx\,dy + \partial^{13}dy^2 + v\,d^2x + w\,d^2y$$

ist, uns wieder denselben Werth

$$\Psi' = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^2\lambda}{dx^2} = \frac{\partial^{31}}{r - t} - \frac{v(2u - 3w)}{(r - t)^2}$$

giebt, den wir oben gefunden haben.

Wir haben also bewiesen, dass die vom Coordinatensysteme unabhängigen geometrischen Grössen $D_{,} \ldots . U \ldots . \Phi' \ldots .$ vollkommen und eindeutig von den Differentialquotienten der Flächengleichung bis zur vierten Ordnung bestimmt werden und umgekehrt, und wir haben die Formeln für diese gegenseitigen Beziehungen im Coordinatensystem $p = q = s = 0$ gegeben. Dass wir diese Beziehungen nur für dieses Coordinatensystem gesucht haben, rührt daher, dass es nur auf diese Weise möglich ist, die Rechnung einigermassen übersichtlich zu

[1] In dieser Form findet sich der Satz wieder bei BIANCHI, Lezioni di geometria differentiale, Pisa 1894, S. 148.

machen. Uebrigens brauchen wir für den vorliegenden Zweck nur diese Relationen zu kennen, da wir gewöhnlich von den geometrischen Grössen ausgehen, um die Flächengleichung zu finden, und da, wenn wir z. B. die Wellenflächengleichung nach einer Brechung gefunden haben, diese gewöhnlich in der Form $z = f(xy)$ erhalten wird. Die hierin liegende Beschränkung auf solche Flächen oder Flächentheile, für welche die Differentialquotienten von z nach x und y aus der Flächengleichung als bestimmte, nicht unendlich grosse Werthe erhalten werden können, ist, wie aus der obigen Rechnung hervorgeht, gleichbedeutend damit, dass die Hauptkrümmungen stetig variiren und keine unendlich grossen Werthe haben, d. h. es sind Kanten und Spitzen auf der Fläche von der Untersuchung ausgeschlossen.

Von den 6 Werthen Φ' .... sind zwei von einander abhängig, was damit im Einklang steht, dass es nur 5 partielle Differentialquotienten 4ter Ordnung der Flächengleichung giebt, und zwar sehen wir dass die Summe $\Omega' + \Omega''$ wesentlich von ∂^{22} abhängt, während die Differenz $\Omega' - \Omega''$ nur aus den Ableitungen zweiter und dritter Ordnung bestimmt wird. Dieser Umstand, welcher unter anderem in dem citirten Liouville'schen Satze zum Ausdruck kommt, bedingt auch eine interessante Beziehung zwischen den beiden Evolutenschalen der Fläche, die später erörtert werden soll.

Bevor wir nun weiter gehen, müssen wir die positiven Richtungen in unserem System bestimmen: wenn wir in der Richtung von wachsenden Z schauen und die Richtung von wachsenden X nach rechts haben, so bezeichnen wir die Richtung nach oben als Richtung der wachsenden Y. Wenn wir hinzufügen, dass wir eine Krümmung positiv rechnen, wenn die concave Seite nach der Richtung der wachsenden bezüglichen Coordinaten gekehrt ist, so haben wir nur noch das Zeichen der Torsion zu bestimmen, was wir am einfachsten und eindeutig thun, indem wir die Torsion einer rechtsgedrehten Curve positiv nennen und eine gewöhnliche Schraube als rechtsgedreht bezeichnen.

Für die weitere Untersuchung der Hauptkrümmungslinien führen wir die beiden Winkel $\vartheta_{,}\vartheta_{,,}$ zwischen den Hauptnormalen der bezüglichen Krümmungslinien und der Flächennormale ein und rechnen sie positiv, wenn die betreffende Hauptnormale sich zwischen den positiven Richtungen der X- und Z-Achse bezw. der Y- und Z-Achse befindet. Wir betrachten die Krümmungslinie als Schnittlinie swischen der gegebenen Fläche und einer anderen cylindrischen auf der Tan-

gentialebene senkrechten. Auf beide Flächen wenden wir MEUSNIERS Theorem an und finden für die ersten Krümmungshalbmesser $\varrho' \varrho''$ der bezüglichen Hauptkrümmungslinien:

$$\varrho' = \varrho_{,} \cos \vartheta_{,} = R_{,} \sin \vartheta_{,} \qquad \varrho'' = \varrho_{,,} \cos \vartheta_{,,} = R_{,,} \sin \vartheta_{,,}$$

Es liegen also der bezügliche Hauptkrümmungsmittelpunkt der Fläche und der geodätische Krümmungsmittelpunkt der Hauptkrümmungslinie auf der Polare, derjenigen Linie, welche in ihrem Krümmungsmittelpunkte auf ihrer osculirenden Ebene senkrecht steht. Für die Winkel ϑ ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\operatorname{tg} \vartheta_{,} = \frac{\varrho_{,}}{R_{,}} = \frac{V}{D_{,}(D_{,} - D_{,,})}$$

$$\cos^2 \vartheta_{,} = \frac{R_{,}^2}{R_{,}^2 + \varrho_{,}^2} = \frac{D_{,}^2 (D_{,} - D_{,,})^2}{V^2 + D_{,}^2 (D_{,} - D_{,,})^2}$$

$$\sin^2 \vartheta_{,} = \frac{\varrho_{,}^2}{R_{,}^2 + \varrho_{,}^2} = \frac{V^2}{V^2 + D_{,}^2 (D_{,} - D_{,,})^2}$$

und die entsprechenden Werthe für $\vartheta_{,,}$

Die Torsion $T_{,} T_{,,}$ der beiden Hauptkrümmungslinien erhalten wir nach der LANCRET'schen Formel $T = \pm \frac{d\vartheta}{ds}$ auf folgende Weise, wobei in unserem System für die erste Hauptkrümmungslinie das obere, für die zweite das untere Zeichen anzuwenden ist:

$$\frac{1}{\cos^2 \vartheta_{,}} \frac{d\vartheta_{,}}{ds_{,}} = \varrho_{,} \cdot \frac{\partial}{\partial s_{,}} \frac{1}{R_{,}} + \frac{1}{R_{,}} \frac{\partial \varrho_{,}}{\partial s_{,}}$$

$$T_{,} = + \frac{\cos^2 \vartheta_{,}}{D_{,}} (\Psi' - U \operatorname{tg} \vartheta_{,})$$

und analog:

$$T_{,,} = - \frac{\cos^2 \vartheta_{,,}}{D_{,,}} (\Psi'' - W \operatorname{tg} \vartheta_{,,})$$

Da für die erste Hauptkrümmungslinie $\frac{d^3 y}{dx^3} = \Psi'$ $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{V}{D_{,} - D_{,,}}$ $\frac{d^3 z}{dx^3} = U$ und $\frac{d^2 z}{dx^2} = D_{,}$ ist, so ist sofort ersichtlich, dass wir denselben Werth für $T_{,}$ aus der für $dy = dz = 0$ allgemein geltenden Formel

$$T = \frac{d^3y\,d^2z - d^2y\,d^3z}{dx\,\{(d^2z)^2 + (d^2y)^2\}}$$

erhalten.

Meusniers Theorem giebt für die erste Krümmung einer auf einer Sphäre verlaufenden Curve

$$\frac{\varrho}{\cos\vartheta} = \text{Const}$$

d. h.

$$\cos\vartheta\,d\varrho + \varrho\sin\vartheta\,d\vartheta = 0$$

oder

$$-\varrho\,\mathrm{tg}\,\vartheta = \frac{d\varrho}{ds}\cdot\frac{ds}{d\vartheta}$$

= Abstand vom Krümmungscentrum der Curve zum Centrum der Sphäre. Wenn wir also eine Curve suchen, die mit der ersten Hauptkrümmungslinie der Fläche die Werthe ϱ $\frac{d\varrho}{ds}$ und T gemeinsam hat, und die auf einer Sphäre verläuft — der sogenannten osculirenden Sphäre, — so ist das Centrum dieser Sphäre auf der Polare der betreffenden Hauptkrümmungslinie gelegen in einem Abstande $\frac{1}{T_{,}}\cdot\frac{d\varrho_{,}}{ds_{,}}$ von ihrem Krümmungscentrum, indem die positive Richtung auf der Polare diejenige ist, welche bei $\vartheta_{,} = 0$ mit der Richtung von wachsenden Y übereinstimmt. Wir erhalten nun für den Abstand $l_{,}$ vom ersten Krümmungsmittelpunkt der Fläche zum Centrum der osculirenden Sphäre der ersten Krümmungslinie

$$l_{,} = \varrho_{,}\sin\vartheta_{,} + \frac{ds_{,}}{d\vartheta_{,}}\cdot\frac{d\varrho'}{ds_{,}}$$

oder da

$$\frac{d\varrho'}{ds_{,}} = \cos\vartheta_{,}\frac{\partial\varrho_{,}}{\partial s_{,}} - \varrho_{,}\sin\vartheta_{,}\frac{d\vartheta_{,}}{ds_{,}}$$

ist:

$$l_{,} = \cos\vartheta_{,}\frac{\partial\varrho_{,}}{\partial s_{,}}\cdot\frac{ds_{,}}{d\vartheta_{,}} = -\frac{U\cos\vartheta_{,}}{D^2_{,}T_{,}} = -\frac{U}{D_{,}\cos\vartheta_{,}(\Psi' - U\,\mathrm{tg}\,\vartheta_{,})}$$

und analoger Weise für die zweite Hauptkrümmungslinie:

$$l_{,,} = +\frac{W\cos\vartheta_{,,}}{D_{,,}^2\,T_{,,}} = -\frac{W}{D_{,,}\cos\vartheta_{,,}(\Psi'' - W\,\mathrm{tg}\,\vartheta_{,,})}$$

Bevor wir nun zur Untersuchung der Krümmungsmittelpunktsflächen übergehen, müssen wir einiges über geodätische Linien vorausschicken. Wir haben die geodätische Krümmung einer auf einer gegebenen Fläche verlaufenden Linie als die Krümmung der Projektion dieser Linie auf der Tangentialebene definirt. Geodätische Linien nennen wir solche, die ohne geodätische Krümmung sind, deren Hauptnormale also mit der Flächennormale zusammenfällt, welche Eigenschaft allgemein durch folgende Gleichungen zwischen den bekannten Ausdrücken für die Richtungscosinuse der beiden Normalen ausgedrückt wird:

$$\frac{p}{d\frac{dx}{d\sigma}} = \frac{q}{d\frac{dy}{d\sigma}} = -\frac{1}{d\frac{dz}{d\sigma}}$$

Durch Einsetzen von $d\frac{dx}{d\sigma} = \frac{d\sigma\, d^2x - dx\, d^2\sigma}{d\sigma^2}$ u. s. w. ergiebt sich nach Elimination von $d^2\sigma$ die allgemeine Differentialgleichung einer geodätischen Linie

$$p(dy\, d^2z - dz\, d^2y) + q(dz\, d^2x - dx\, d^2z) - (dx\, d^2y - dy\, d^2x) = 0$$

und nach Differentiation für $d\sigma = dx$ und $p = q = 0$:

$$s\, dx\, d^2z = -d^3y$$

Nun ist aber für eine doppeltgekrümmte Linie, wenn $d\sigma = dx$ und $d^2y = 0$ ist, allgemein die Torsion gleich $\frac{d^3y}{dx\, d^2z}$. Wir finden also, nachdem wir den analogen Beweis für $dy = d\sigma$ auf dieselbe Weise erbracht haben, dass im Coordinatensystem $p = q = 0$ die Torsion der beiden geodätischen Linien, deren Tangenten in der XZ- bezw. YZ-Ebene liegen, gleich s ist — vom positiven oder negativen Zeichen abgesehen.

Um jetzt die Krümmungsmittelpunktsfläche zu untersuchen, wollen wir den ersten Krümmungsradius der Fläche auf die drei Coordinatenachsen projiciiren. Es ergiebt sich, wenn wir mit xyz die Coordinaten eines Punktes der Fläche, mit $\xi\eta\zeta$ diejeningen des zugehörigen

Krümmungsmittelpunktes und mit $\alpha\beta\gamma$ die Richtungscosinuse der betreffenden Normale bezeichnen,

$$\xi - x = \varrho_{,}\alpha$$
$$\eta - y = \varrho_{,}\beta$$
$$\zeta - z = \varrho_{,}\gamma$$

aus welchen Gleichungen mit Hilfe der Flächengleichung und den Bestimmungsgleichungen von $\varrho_{,}$ und $\alpha\beta\gamma$ durch Elimination von xyz eine Gleichung swischen $\xi\eta\zeta$ erhalten wird, welche besagt, dass die ersten Krümmungsmittelpunkte auf einer Fläche liegen. Diese Fläche nennen wir erste oder $s_{,}$-Schale der Krümmungsmittelpunktsfläche oder der Evolute. Die Gleichungen für die zweite oder $s_{,,}$-Schale erhalten wir, wenn wir $\varrho_{,,}$ anstatt $\varrho_{,}$ setzen. Durch zweimalige Differentiation erhalten wir für $p = q = s = 0$, wobei $\alpha = \beta = d\gamma = 0$ und $\gamma = 1$ sind,

$$d\xi = dx + \varrho_{,}d\alpha$$
$$d\eta = dy + \varrho_{,}d\beta$$
$$d\zeta = d\varrho_{,}$$
$$d^2\xi = d^2x + \varrho_{,}d^2\alpha + 2\,d\varrho_{,}d\alpha$$
$$d^2\eta = d^2y + \varrho_{,}d^2\beta + 2\,d\varrho_{,}d\beta$$
$$d^2\zeta = d^2z + \varrho_{,}d^2\gamma + d^2\varrho_{,}$$

Wenn wir nun $1 + p^2 + q^2 = N^2$ setzen, so haben wir

$$N\alpha = -p \qquad N\beta = -q \qquad N\gamma = 1$$
$$Nd\alpha + \alpha dN = -dp \qquad Nd\beta + \beta dN = -dq \qquad Nd\gamma + \gamma dN = 0$$
$$Nd^2\alpha + 2\,d\alpha dN + \alpha d^2N = -d^2p$$
$$Nd^2\beta + 2\,d\beta dN + \beta d^2N = -d^2q$$
$$Nd^2\gamma + 2\,d\gamma dN + \gamma d^2N = 0$$

oder für $p = q = s = 0$, wobei $N = 1$ $dN = 0$ und $d^2N = dp^2 + dq^2$ sind

$$d\alpha = -r\,dx \qquad d\beta = -t\,dy \qquad d\gamma = 0$$
$$d^2\alpha = -u\,dx^2 - 2v\,dx\,dy - w\,dy^2 - r\,d^2x$$
$$d^2\beta = -v\,dx^2 - 2w\,dx\,dy - u\,dy^2 - t\,d^2y$$
$$d^2\gamma = -r^2dx^2 - t^2dy^2$$

Wenn wir jetzt die Differentiation nach $s_,$ und $s_{,,}$ ausführen, so finden wir durch Einsetzen von diesen Werthen

$$d\xi = 0$$

$$d\eta = \frac{D_, - D_{,,}}{D_,} ds_{,,}$$

$$d\zeta = -\frac{1}{D_,^2}(U ds_, + V ds_{,,})$$

$$d^2\xi = \frac{1}{D_,}(U ds_,^2 - W ds_{,,}^2)$$

$$d^2\eta = \frac{1}{D_,^2}(2 D_{,,} U ds_, ds_{,,} + \{2 D_{,,} V - D_, \mathfrak{M}\} ds_{,,}^2)$$

$$d^2\zeta = -\frac{1}{D_,^2}\Big(\Big\{\Phi' - \frac{2U^2}{D_,}\Big\} ds_,^2 + 2\Big\{\frac{\partial^2 D_,}{\partial s_, \partial s_{,,}} - \frac{2UV}{D_,}\Big\} ds_, ds_{,,} +$$

$$+ \Big\{\Omega' - D_, D_{,,}(D_, - D_{,,}) - \frac{2V^2}{D_,}\Big\} ds_{,,}^2\Big)$$

Da in dem Ausdruck für $d^2\xi$ die Coefficienten von d^2x und d^2y gleich Null sind, so dass weder $d^2s_,$ noch $d^2s_{,,}$ vorkommen, so können wir die Differentialquotienten für die Gleichungsform $\xi = f(\eta\zeta)$ einfach durch Einsetzen der aus den Werthen $d\eta$ und $d\zeta$ erhaltenen Ausdrücke

$$ds_{,,} = d\eta \frac{D_,}{D_, - D_{,,}} \qquad ds_, = -d\eta \frac{D_, V}{U(D_, - D_{,,})} - d\zeta \frac{D_,^2}{U}$$

in den Ausdruck für $d^2\xi$ erhalten:

$$d^2\xi = \frac{D_,}{U}\Big\{\frac{V^2 - UW}{(D_, - D_{,,})^2} d\eta^2 + \frac{2 D_, V}{D_, - D_{,,}} d\eta d\zeta + D_,^2 d\zeta^2\Big\}$$

Aus diesen Gleichungen gehen nun fast unmittelbar die sonst nur auf umständlichere Weise zu deducirenden allgemeinen Eigenschaften einer Evolute hervor. So sehen wir, dass $d\xi = 0$ ist, woraus folgt, dass die Evolutenschalen von den ungleichnamigen Hauptnormalebenen tangirt werden, dass weiter für $ds_{,,} = 0$ nicht nur $d\eta = 0$, sondern auch $d^2\eta = 0$ ist, und dass folglich einestheils diejenige Linie auf der $s_,$-Schale, welche der ersten Hauptkrümmungslinie der Fläche entspricht, von der Flächennormale tangirt wird, mithin die Flächennormalen zwei Systeme von abwickelbaren Flächen bilden, welche die Fläche längs

den zwei Systemen von Hauptkrümmungslinien schneiden, und deren Kantlinien, Filarevoluten der betreffenden Hauptkrümmungslinien, mit den $s_{,}$-Linien der $s_{,}$-Schale bezw. mit den $s_{,,}$-Linien der $s_{,,}$-Schale zusammenfallen, dass aber auch andererseits diese Linien geodätische Linien sind. Weiter sehen wir, dass für $d\zeta = 0$ auch $d\varrho_{,} = 0$, und dass für eine Linie $d\varrho_{,} = 0$ $d^2\zeta = d^2 z + \varrho_{,} d^2 \gamma = \frac{D_{,} D_{,,}}{D_{,} - D_{,,}} d\eta^2$ ist, dass also die orthogonalen Trajectorien der geodätischen $s_{,}$-Linien auf der $s_{,}$-Schale einen geodätischen Krümmungshalbmesser $= \varrho_{,,} - \varrho_{,}$ haben und denjenigen Linien auf der Fläche entsprechen, für welche $d\varrho_{,} = 0$ ist. Das Krümmungsmass der $s_{,}$-Schale ist

$$K' = \frac{\partial^2 \xi}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial \zeta^2} - \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial \eta \partial \zeta}\right)^2 = - \frac{W}{U} \cdot \frac{D_{,}^4}{(D_{,} - D_{,,})^2} = - \frac{1}{(\varrho_{,,} - \varrho_{,})^2} \frac{\frac{\partial \varrho_{,,}}{\partial s_{,}}}{\frac{\partial \varrho_{,}}{\partial s_{,}}}$$

woraus die Consequenzen gezogen werden können für Flächen, welche durch eine Gleichung $f(\varrho_{,} \varrho_{,,}) = 0$ charakterisirt sind.

Um nun zunächst die $s_{,}$-Linie zu untersuchen, bilden wir das Linienelement

$$d\sigma_{,}' = d\zeta = - \frac{U}{D_{,}^2} ds_{,}$$

und finden dann die beiden Krümmungen durch die Flächengleichung der betreffenden Schale, da die Linie von der Z-Achse tangirt wird und eine geodätische Linie ist,

$$\frac{1}{R'} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial \zeta^2} = \frac{D_{,}^3}{U}$$

$$\pm T' = \frac{\partial^2 \xi}{\partial \eta \partial \zeta} = \frac{D_{,}^2 V}{U(D_{,} - D_{,,})} = \frac{\varrho_{,}}{R_{,} R'} = \frac{\operatorname{tg} \vartheta_{,}}{R'}$$

In unserem Systeme haben wir, wie man sich leicht durch Betrachtung der beiden durch die Flächennormalen längs den Hauptkrümmungslinien gebildeten abwickelbaren Flächen überzeugen kann, in diesem Ausdruck für die $s_{,}$-Schale positives, für die $s_{,,}$-Schale negatives Zeichen zu benützen.

Daraus, dass $R' T' = tg \vartheta_{,}$ ist, folgt, dass die $s_{,}$-Linie eine geodätische Linie in einer abwickelbaren Fläche darstellt, deren Generatrice mit der Polare der ersten Hauptkrümmungslinie identisch ist, oder mit

anderen Worten, dass die abwickelbaren Polarflächen der Hauptkrümmungslinien rectificirende Flächen der gleichnamigen Linien auf den gleichnamigen Evolutenschalen sind. Für die geodätische Krümmung der ersten Hauptkrümmungslinie dieser rectificirenden Fläche im ersten Fokalpunkt der Urfläche finden wir, da die negative Richtung von $d\sigma_,'$ mit der positiven von $ds_,$ in unserem Systeme gleichsinnig ist, $+\frac{1}{\cos\vartheta_,}\frac{d\vartheta_,}{d\sigma_,'}$ d. h.

$$-\frac{D_,^2 T_,}{U\cos\vartheta_,}=\frac{1}{l_,}=-\frac{D_,\cos\vartheta_,}{U}(\Psi'-U\operatorname{tg}\vartheta_,)$$

als Ausdruck dafür, dass der Ort der Krümmungsmittelpunkte der osculirenden Sphären einer doppelt gekrümmten Linie die Kantlinie der abwickelbaren Polarfläche ist.

Indem wir ferner in Bezug auf die $s_,$-Linie nur den später anzuwendenden Werth

$$R'\frac{dR'}{d\sigma_,'}=-\frac{\Phi'}{D_,^4}+\frac{3U^2}{D_,^5}$$

angeben, wollen wir uns der $s_{,,}$-Linie zuwenden. Hier finden wir sofort:

$$\frac{d\sigma_{,,}'}{ds_{,,}}=\frac{1}{D_,^2}\sqrt{V^2+D_,^2(D_,-D_{,,})^2}=\frac{D_,-D_{,,}}{D_,\cos\vartheta_,}$$

$$\frac{d\eta}{d\zeta}=-\frac{D_,(D_,-D_{,,})}{V}=-\cot\vartheta_,$$

von welchen Ausdrücken der letzte besagt, dass die Tangente der $s_{,,}$-Linie mit der Polare der ersten Hauptkrümmungslinie der Fläche zusammenfällt. Da nun diese auch die rectificirende Linie der $s_,$-Linie ist, so bilden die $s_,$- und $s_{,,}$-Linien der Evolute conjugirte Liniensysteme.

Weiter erhalten wir für die Krümmung des von der $s_{,,}$-Linie tangirten Normalschnittes:

$$\frac{1}{R_*'}=\frac{\partial^2\xi}{\partial\sigma_{,,}'^2}=-\frac{D_,W\cos^2\vartheta_,}{(D_,-D_{,,})^2}=\frac{\varrho_{,,}\cos^2\vartheta_,}{\varrho_{,,}-\varrho_,}\cdot\frac{1}{R_{,,}}$$

und für die geodätische Krümmung:

$$\frac{1}{R_{,,}'}=\frac{\frac{\partial^2\zeta}{\partial\eta^2}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right)^2\right)^3}}=\cos^3\vartheta_,\frac{\partial^2\zeta}{\partial\eta^2}$$

wobei

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial s_{\prime\prime}{}^2} \cdot \left(\frac{d s_{\prime\prime}}{d\eta}\right)^2 + \frac{\partial \zeta}{\partial s_{\prime\prime}} \cdot \frac{d^2 s_{\prime\prime}}{d\eta^2}$$

zu setzen ist. Es ergiebt sich:

$$\frac{1}{R_{\prime\prime}{}'} = -\frac{\cos^3 \vartheta_\prime}{(D_\prime - D_{\prime\prime})^2}\left(\Omega'' - \frac{W(U-2W)}{D_\prime - D_{\prime\prime}}\right) = \frac{\cos^3 \vartheta_\prime}{D_\prime - D_{\prime\prime}} \left\{ \frac{d}{d\sigma_\prime} \frac{1}{R_{\prime\prime}} - \frac{1}{R_{\prime\prime}{}^2} \right\}$$

Dass sämmtliche für die erste Evolutenschale bewiesenen Eigenschaften und deducirten Werthe mutatis mutandis auch für die $s_{\prime\prime}$-Schale gelten, folgt von selbst. Da diese Werthe nur durch Permutation von Buchstaben erhalten werden, brauche ich sie nicht hier wiederzugeben. Wir wollen nur darauf aufmerksam machen, dass der Umstand, dass aus fünf Differentialquotienten vierter Ordnung der Flächengleichung sechs abgeleitete Hauptkrümmungswerthe bestimmt werden sollen, nicht nur bedingt, dass $\Omega' - \Omega''$ nur von den Differentialquotienten zweiter und dritter Ordnung der Flächengleichung bestimmt werden, und ebenso nicht nur im LIOUVILLE'schen Satze zum Ausdruck kommt, sondern auch die durch folgende Formel ausgedrückte Beziehung zwischen den geodätischen Krümmungen der $s_{\prime\prime}$-Linie der $s_\prime$-Schale und der $s_\prime$-Linie der $s_{\prime\prime}$-Schale ergiebt:

$$\frac{1}{R_{\prime\prime}{}' \cos^3 \vartheta_\prime} - \frac{1}{R_\prime{}'' \cos^3 \vartheta_{\prime\prime}} = \frac{D_\prime D_{\prime\prime}}{D_\prime - D_{\prime\prime}} = \frac{1}{\varrho_{\prime\prime} - \varrho_\prime}$$

In der bisherigen Darstellung haben wir stillschweigend die gewöhnliche Annahme gemacht, dass sämmtliche Differentialquotienten der Flächengleichung sowie auch die Differenz $r - t$ endliche, von Null verschiedene und eindeutig bestimmte Werthe haben, wodurch singuläre Linien und Punkte, d. h. Kanten und Spitzen so wohl auf der Fläche wie auf den beiden Evolutenschalen ausgeschlossen sind. Um die für unseren Zweck wichtigen Eigenschaften derjenigen Flächenelemente, deren Evoluten solche Linien oder Punkte aufweisen, ermitteln zu können, wollen wir jetzt die Veränderungen untersuchen, welche eintreten, wenn die einen oder anderen der genannten Werthe gleich Null werden.

Zunächst nehmen wir hierbei an, dass sowohl $D_{\prime}$ wie $D_{\prime\prime}$ und $D_{\prime} - D_{\prime\prime}$ endliche von Null verschiedene Werthe haben.

Wenn für ein solches Flächenelement im gegebenen Bunkte $V = 0$ ist, so finden wir sofort $\frac{1}{R_{\prime}} = 0$ $\operatorname{tg} \vartheta_{\prime} = 0$ $K'' = 0$ und $\frac{1}{R_{*}''} = 0$, d. i. die erste Hauptkrümmungslinie ist im gegebenen Punkte eine geodätische Linie, die $s_{\prime\prime}$-Linie der $s_{\prime}$-Schale der Evolute steht im ersten Krümmungsmittelpunkt auf der Normale senkrecht, und die $s_{\prime\prime}$-Schale hat im zweiten Krümmungsmittelpunkte eine vollständige Berührung zweiter Ordnung mit einer abwickelbaren Fläche, deren Generatrice mit ihrer $s_{\prime}$-Linie zusammenfällt.

Ist längs der ganzen $s_{\prime}$-Linie $V = 0$, während $\frac{\partial V}{\partial s_{\prime\prime}}$ von Null verschieden ist, so ist vowohl $\Psi' = 0$ wie $\frac{1}{l_{\prime}} = 0$ und $T_{\prime} = 0$ sowie auch $T' = 0$ d. i. die erste Hauptkrümmungslinie ist eine geodätische, einfach gekrümmte Linie, deren Polarfläche cylindrisch ist. Während demzufolge die $s_{\prime}$-Linie der $s_{\prime}$-Schale eine ebene Curve ist, stellt die $s_{\prime}$-Linie der $s_{\prime\prime}$-Schale eine Linie dar, längs welcher das Krümmungsmass dieser Schale gleich Null ist. Ist andererseits $\frac{\partial V}{\partial s_{\prime}}$ von Null verschieden, während längs der ganzen $s_{\prime\prime}$-Linie $V = 0$ ist, so finden wir $\Omega' = 0$ $R_{\prime\prime}' = \varrho_{\prime\prime} - \varrho_{\prime}$ $\frac{1}{R_{\prime}''} = 0$ d. h. auf der $s_{\prime}$-Schale ist die entsprechende $s_{\prime\prime}$-Linie eine orthogonale Trajectorie der $s_{\prime}$-Linien; die $s_{\prime\prime}$-Schale dagegen hat längs der ganzen $s_{\prime\prime}$-Linie das Krümmungsmass Null.

Besteht schliesslich für die ganze Fläche die Gleichung $V = 0$ so finden wir durch Zusammenstellung des oben Gesagten, dass auf der $s_{\prime}$-Schale die $s_{\prime}$- und $s_{\prime\prime}$-Linien sich überall rechtwinkelig schneiden, woraus, da sie conjugirte Linien sind, folgt, dass sie Hauptkrümmungslinien sind. Da wir weiter $\frac{R_{*}'}{R_{\prime\prime}'} = \frac{R_{\prime\prime}}{\varrho_{\prime\prime}} = \cot \vartheta_{\prime\prime}$ finden, so ist die osculirende Ebene der $s_{\prime\prime}$-Linie der $s_{\prime}$-Schale überall mit der osculirenden Ebene der zweiten Hauptkrümmungslinie im entsprechenden Punkte der Urfläche parallel. Die $s_{\prime\prime}$-Schale hat überall das Krümmnngsmass Null, stellt also eine abwickelbare Fläche dar, welche demnach gemeinsame Polarfläche nicht nur sämmtlicher $s_{\prime\prime}$-Linien der Urfläche, sondern auch sämmtlicher $s_{\prime\prime}$-Linien der $s_{\prime}$-Schale der Evolute ist. Da folglich in

sämmtlichen Schnittpunkten einer bestimmten $s_{\prime}$-Linie der Urfläche mit den sie kreuzenden $s_{\prime\prime}$-Linien die Polaren aller dieser Linien mit einer und derselben Generatrice der $s_{\prime\prime}$-Schale zusammenfallen, so sind die osculirenden Ebenen von zwei verschiedenen $s_{\prime\prime}$-Linien in denjenigen Punkten, wo sie eine gemeinsame $s_{\prime}$-Linie schneiden, parellel, was auch von der $s_{\prime}$-Schale gilt. Dies sind die Eigenschaften, welche die einhüllenden Flächen von Rotationsflächen, die »moulures» charakterisiren. Die Bedingung ist also $V=0$ oder mit anderen Worten: die eine Schaar von Krümmungslinien sind geodätische Linien. Im Specialfalle $\frac{1}{l_{\prime\prime}}=0$ ist die $s_{\prime\prime}$-Schale der Evolute eine cylindrische Fläche, und die zweite Schaar von Hauptkrümmungslinien der Urfläche stellen ebene Curven dar, welche sämmtlich in parallelen Ebenen liegen, was auch für die $s_{\prime\prime}$-Linien der $s_{\prime}$-Schale gilt. Ist noch dazu für einen gegebenen Punkt $W=0$ und folglich auch $\vartheta_{\prime\prime}=0$, so folgt daraus, dass auch $\Psi''=0$ ist, d. h. die durch diesen Punkt gehende zweite Hauptkrümmungslinie ist in ihrer ganzen Ausdehnung eine geodätische Linie und liegt in einer auf der Achse der von der $s_{\prime\prime}$-Schale dargestellten Cylinderfläche senkrechten Ebene. Die Bedingung $V=W=0$ auf der ganzen Fläche kann wegen des Zusammenhanges von Ω' und Ω'' nicht bei Flächen mit von Null verschiedenem Krümmungsmass erfüllt werden.

Wenn in einer Fläche $V=0$ überall auch $W=0$ ist, so degenerirt die $s_{\prime\prime}$-Schale in eine gerade Linie, eine Brennlinie. Da hierbei auch $\frac{\partial^2 D_{\prime\prime}}{\partial s_{\prime}\partial s_{\prime\prime}}$ Ψ'' und $T_{\prime\prime}$ gleich Null sein müssen, so haben die zweiten Hauptkrümmungslinien der Fläche konstante geodätische Krümmung und liegen in parallelen Ebenen. Da weiter $\varrho_{\prime\prime}$ längs diesen Linien konstant ist, so bilden sie Kreise, deren Mittelpunkte auf der Brennlinie liegen müssen. Die Fläche ist also eine Rotationsfläche um die Brennlinie als Achse. Dass die Bedingung $V=W=0$ oder $U=W=0$ auf der ganzen Fläche auch für eine Rotationsfläche nothwendig ist, folgt schon daraus, dass in einer solchen Fläche alle Normalen durch eine gerade Linie gehen müssen.

Hier möchte ich eine kurze Bemerkung machen. Wir haben gefunden, dass eine Rotationsfläche der Bedingung $V=W=0$ auf der ganzen Fläche entspricht, welche Bedingung im Flächenelemente durch die Gleichungen $V=W=\Psi'=\Omega'=\Psi''=\Phi''=0$ ausgesprochen wird. Wenn wir aber in einem gegebenen Punkte einer Fläche diese

Gleichungen erfüllt finden, so können wir nicht den Schluss ziehen, die Fläche sei eine Rotationsfläche, sondern wir wissen nur, dass die Fläche im gegebenen Punkte eine vollständige Berührung vierter Ordnung mit einer Rotationsfläche hat.

Wenn wir andererseits für einen Punkt der Fläche $U = 0$ finden, so resultirt daraus in erster Linie:

$$\frac{d\sigma_,'}{ds_,} = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial s_,}\frac{d\sigma'_,}{ds_,} = -\frac{\Phi'}{D_,^2}$$

woraus hervorgeht, dass die $s_,$-Linie auf der $s_,$-Schale eine Spitze bildet, welche nach der Richtung wachsender bezw. abnehmender Z schaut, je nachdem Φ' positives oder negatives Zeichen hat. Für die Projektion dieser Spitze auf die XZ-Ebene erhalten wir:

$$R' = 0 \qquad R'\frac{dR'}{d\sigma_,'} = -\frac{\Phi'}{D_,^4}$$

Diese Projektion bildet also eine Linie, welche in der Spitze ihre eigene Evolute trifft, die in dem fraglichen Punkte den Krümmungshalbmesser $\frac{\Phi'}{D_,^4}$ hat. Da nun die Tangente der Evolvente mit der Normale der Evolute zusammenfällt und diese bestimmt ist, so folgt daraus, dass die fragliche Spitze eine bestimmte Tangente hat. Damit ist aber auch bewiesen, dass die Beziehung $d\zeta = d\sigma_,'$ auch für $U = 0$ gilt. Auch wenn $\Phi' = 0$ wäre, könnte die Richtung der Tangente der Evolvente bestimmt sein, da nämlich die Evolute eine Spitze hätte mit bestimmter Normalenrichtung. Wären aber U und Φ' längs der ganzen $s_,$-Linie gleich Null, dann freilich gäbe es keine bestimmte Tangente mehr. Näheren Aufschluss über die Projektion der $s_,$-Linie der $s_,$-Schale auf ihre osculirende Ebene können wir nicht erhalten. Wir können aber das Resultat anders formuliren. Da nämlich für die Spitze die Differentialquotienten bis zur dritten Ordnung mit denjenigen im Anfangspunkte der Kreisevolvente identisch sind, so können wir auch sagen: die Gleichung der Projektion ist mit derjenigen einer Kreisevolvente bis auf unendlich kleine Grössen vierter Ordnung identisch. In diesem Sinne, aber nur in diesem, gilt auch der Satz, welcher bei der Untersuchung der sphärischen Aberration für dieselbe Spitze gewöhnlich so formulirt wird: die Linie ist in der Nähe der Spitze eine semicubische Parabel. Es giebt nämlich immer eine solche, welche in ihrer Spitze eine Berührung dritter Ordnung hat mit einer beliebigen Spitze,

für welche $R'\frac{dR'}{d\sigma_{,}}$ endlich ist. Zu der fraglichen semicubischen Parabel gelangt man am einfachsten auf folgendem Wege. Wir ermitteln allgemein den Werth

$$d^3\xi = d^3x + \varrho_{,} d^3\alpha + 3\,d\varrho_{,} d^2\alpha + 3\,d^2\varrho_{,} d\alpha$$

für die Evolute, in welchem wir

$$d^3\alpha = -\,d^3p - 3\,d^2N\,d\alpha = -\,d^3p + 3\,dp\,(dp^2 + dq^2)$$

zu setzen haben. Da hierbei d^3p auch das Glied $r\,d^3x$ hat, so verschwindet d^3x. Wir erhalten auf diese Weise, nachdem wir $ds_{,,} = 0$ gesetzt haben:

$$d^3\xi = \left(\frac{2\,\Phi'}{D_{,}} - \frac{3\,U^2}{D_{,}^2}\right) ds_{,}^3$$

Da nun $d^2\xi = d\xi = d\zeta = 0$ wenn $U = 0$ ist, so ergiebt sich nach Entwickelung von ξ und ζ nach Potenzen von $s_{,}$ für $U = 0$:

$$\xi = \frac{s_{,}^3\,\Phi'}{3\,D_{,}} \qquad \zeta - \varrho_{,} = -\,\frac{s_{,}^2\,\Phi'}{2\,D_{,}^2}$$

oder nach Elimination von $s_{,}$

$$9\,\Phi'\xi^2 = -\,8\,D_{,}^4(\zeta - \varrho)^3$$

die Gleichung der gesuchten semicubischen Parabel. Auch durch Differentiation dieser Gleichung ist es leicht zu zeigen, dass die Spitze eine bestimmte Tangente hat, und ebenso den oben angegebenen Werth für $R'\frac{dR'}{d\sigma_{,}}$ wieder zu bekommen.

Für die Projektion der Spitze auf die YZ-Ebene genügt es zu constatiren, das nicht nur $d^2\eta = 0$, sondern auch $d^3\eta = 0$ ist, so dass diese Projektion in der Spitze eine Berührung dritter Ordnung mit der Flächennormale hat.

Aus dem allgemeinen Ausdrucke für die Torsion einer doppelt gekrümmten Linie ergiebt sich nämlich für $d\xi = d\eta = d^2\eta = 0$:

$$T = \pm\,\frac{d^3\eta}{d^2\xi\,d\zeta}$$

in welchem Ausdrucke für die $s_{,}$-Linie der $s_{,}$-Schale das untere Zeichen zu benützen ist. Hierbei ergiebt sich allgemein durch Zu-

sammenstellung mit dem schon angegebenen Werthe für diese Torsion:

$$d^3\eta = -\frac{D_{,}^2 V}{U(D_{,} - D_{,,})} d^2\xi d\zeta = \frac{UV}{D_{,}(D_{,} - D_{,,})} ds_{,}^3$$

Zu demselben Resultat gelangen wir von der für die Evolute geltenden Beziehung aus

$$d^3\eta = d^3y + \varrho_{,} d^3\beta + 3\,d\varrho_{,} d^2\beta + 3\,d^2\varrho_{,} d\beta$$

in welcher $ds_{,,} = 0$ und $d^3y = \Psi' ds_{,}^3$ zu setzen ist.

Aus den Eingangs dieses Capitels mitgetheilten Werthen für die Ableitungen der Hauptkrümmungen geht unmittelbar hervor, dass, wenn sämmtliche Differentialquotienten der Flächengleichung endliche Werthe haben oder gleich Null sind, dasselbe für sämmtliche Ableitungen der Hauptkrümmungen nach $s_{,}$ und $s_{,,}$ gelten muss, wofern $D_{,} D_{,,}$ und $D_{,} - D_{,,}$ von Null verschieden sind. Es folgt hieraus, dass auch $dU\; d^2U \ldots\ldots d\Phi'\; d^2\Phi' \ldots\ldots$ keine unendlich grosse Werthe haben können.

Wenn nun ein Punkt $U = 0$ vorliegt, so kann dieser entweder isolirt vorkommen, oder es existirt eine Linie $U = 0$ auf der Fläche. Falls nicht Φ' und Ψ' gleichzeitig gleich Null sind, existirt immer eine und nur eine Linie $U = 0$, deren Richtung durch die Gleichung

$$dU = \Phi' ds_{,} + \Psi' ds_{,,} = 0$$

angegeben wird. Wenn aber $\Phi' = \Psi' = 0$ ist, so giebt die quadratische Gleichung $d^2U = 0$ zwischen $ds_{,}$ und $ds_{,,}$ entweder eine oder zwei Linien $U = 0$ an, oder es liegt, wenn sie nur imaginäre Wurzeln hat, ein isolirter Punkt $U = 0$ vor. Dies kann also nur vorkommen, wenn der Grad der betreffenden Gleichung durch eine gerade Zahl ausgedrückt wird, und dabei die partiellen Ableitungen von U sowohl nach $s_{,}$ allein als nach $s_{,,}$ allein von Null verschieden sind, da sonst entweder die Bedingung $ds_{,} = 0$ oder $ds_{,,} = 0$ genügt. Nun hat aber die $s_{,}$-Linie der ersten Evolutenschale eine Spitze in den Fällen, wo $\varrho_{,}$ als Funktion von $s_{,}$ ein Maximum oder Minimum aufweist, wobei die erste Ableitung von U nach $s_{,}$ allein, welche nicht gleich Null ist, eine ungerade Ordnungszahl hat.

Ein isolirter Flächenpunkt $U = 0$ kann also niemals einer Spitze der $s_{,}$-Linie der ersten Evolutenschale entsprechen. Wenn eine solche vorliegt, findet sich immer eine Linie $U = 0$ vor, welche also allge-



mein einer Kante auf der ersten Evolutenschale entspricht, obwohl auch eine Linie $U = \Phi' = 0$ vorkommen kann, welcher, wenn $\frac{d\Phi'}{ds_{,}} \gtrless 0$ ist, keine Evolutenkante entspricht.

Im allgemeinen Falle, wo weder Φ' noch Ψ' bei $U = 0$ verschwinden, schneidet die Linie $U = 0$ auf der Fläche sowohl die $s_{,}$- wie die $s_{,,}$-Linien, und die Kante auf der ersten Evolutenschale bildet die einhüllende Curve ihrer $s_{,,}$-Linien, welche unter endlicher Krümmung von dem einen der durch die Kante getrennten Blätter der ersten Schale längs dieser auf das andere übergehen. Die orthogonalen Trajectorien der $s_{,}$-Linien haben dagegen Spitzen beim Uebergang der Kante, deren Neigung zur Tangentialebene durch den Winkel $\vartheta_{,}$ ausgedrückt wird. Diese Spitzen verschwinden nur, wenn $V = 0$ wird, wobei die orthogonalen Trajectorien der $s_{,}$-Linien mit den $s_{,,}$-Linien zusammenfallen.

Ist $\Psi' = 0$, so fällt die Linie $U = 0$ der Fläche im gegebenen Punkte mit der $s_{,,}$-Linie zusammen, und wenn längs dieser ganzen Linie die Bedingung $\Psi' = 0$ erfüllt ist, so wird die Kantlinie der ersten Schale durch eine $s_{,,}$-Linie gebildet. Ist hierbei auch $W = 0$, so ist die Kante eine einfach gekrümmte Linie, deren osculirende Ebene mit dem zweiten Hauptnormalschnitt der Fläche zusammenfällt.

Im Falle $\Phi' = 0$ $\Psi' \gtrless 0$ ergiebt sich aus den Gleichungen $dU = 0$ und $d^2 U = 0$, dass die Linie $U = 0$ die $s_{,}$-Linie der Fläche berührt, indem $ds_{,,} = 0$ sowie $\frac{\partial^2 U}{\partial s_{,}^2} ds_{,}^2 + \Psi' d^2 s_{,,} = 0$ erhalten wird. Wenn also $\frac{\partial^2 U}{\partial s_{,}^2} \gtrless 0$ ist, so überschreitet die Linie $U = 0$ auf der Fläche nicht die durch den betreffenden Punkt gehende $s_{,}$-Linie, und die Kantlinie der ersten Evolutenschale, welche die entsprechende geodätische Linie nicht überschreiten kann, und deren osculirende Ebene auf der osculirenden Ebene dieser senkrecht stehen muss, bildet im fraglichen Krümmungsmittelpunkt eine Spitze. Da nun Φ' beim Durchgang durch den gegebenen Punkt auf der Fläche längs der $s_{,}$-Linie und folglich auch längs der ihr berührenden Linie $U = 0$ das Vorzeichen wechselt, so schauen die beiden Zweige der Kante, welche in der Spitze zusammenlaufen, nach entgegengesetzten Richtungen. Bei $\Phi' = 0$ $\Psi' \gtrless 0$ $\frac{\partial^2 U}{\partial s_{,}^2} = 0$ $\frac{\partial^3 U}{\partial s_{,}^3} \gtrless 0$ ergiebt sich auf dieselbe Weise $ds_{,,} = 0$ $d^2 s_{,,} = 0$ $\Psi' d^3 s_{,,} + \frac{\partial^3 U}{\partial s_{,}^3} = 0$,

wonach die Linie $U=0$ wie im allgemeinen Falle die entsprechende $s_{,}$-Linie überschreitet, und die Kante wieder als einhüllende Curve der $s_{,,}$-Linien der ersten Schale ohne Spitzenbildung verläuft.

Wenn bei $\Phi' = \Psi' = 0$ von den zweiten Ableitungen von U nur $\frac{\partial^2 U}{\partial s_{,} \partial s_{,,}}$ von Null verschieden ist, so giebt es zwei Linien $U=0$ auf der Fläche, von welchen die eine die $s_{,}$-Linie, die andere die $s_{,,}$-Linie berührt. Die Gleichung $d^3 U = 0$ ergiebt dann:

$$\frac{\partial^3 U}{\partial s_{,}^3} ds_{,}^3 + 3\,\frac{\partial^3 U}{\partial s_{,}^2 \partial s_{,,}} ds_{,}^2 ds_{,,} + 3\,\frac{\partial^3 U}{\partial s_{,} \partial s_{,,}^2} ds_{,} ds_{,,}^2 + \frac{\partial^3 U}{\partial s_{,,}^3} ds_{,,}^3 +$$
$$+ 3\,\frac{\partial^2 U}{\partial s_{,} \partial s_{,,}} (ds_{,} d^2 s_{,,} + ds_{,,} d^2 s_{,}) = 0$$

wonach die Linie $U=0$, welche die $s_{,}$-Linie berührt, diese nicht überschreitet, die entsprechende Kantlinie also eine Spitze hat, wenn $\frac{\partial^3 U}{\partial s_{,}^3} \gtrless 0$ ist. Da hierbei Φ' längs der fraglichen Linie $U=0$ nicht das Vorzeichen wechselt, so schauen die beiden Zweige der entsprechenden Kantlinie nach derselben Richtung, aber zwischen ihnen verläuft die der anderen Linie $U=0$ entsprechende Kante, welche nach entgegengesetzer Richtung schauen muss, da $d^2 s_{,,}$ für die Linie $ds_{,,} = 0$ entgegengesetztes Zeichen gegenüber dem Produkt $\frac{d\Phi'}{ds_{,,}} \cdot \frac{d^2\Phi'}{ds_{,}^2}$ hat. Es verläuft also auf der ersten Evolutenschale eine Kante, welche sich im gegebenen Punkte gleichsam in drei theilt, von denen die mittlere nach entgegengesetzter die beiden äusseren nach derselben Richtung wie die ungetheilte schauen. Die hierbei entstehenden Schnittlinien der Evolute ergeben sich von selbst.

Auf diese Weise lässt sich die Diskussion fortführen, so weit man beliebt. Man findet, dass eine Evolutenkante unter den gemachten Voraussetzungen, d. h. wenn die Differentialquotienten der Flächengleichung keine unendlich grosse Werthe haben, niemals in einer Spitze aufhören, wohl aber unter Zeichenwechsel für Φ' durch eine solche hindurchgehen kann. Diesen Vorgang können wir auch so definiren, dass zwei Kanten, welche nach entgegengesetzter Richtung schauen, unter Zusammenlaufen in einer Spitze endigen können. Andererseits, dass wenn längs einer Kante ohne Spitze Φ' das Vorzeichen wechselt, im Punkte des Zeichenwechsels die Spitze einer anderen Kante bele-

gen ist, für deren beide Zweige Φ' dasselbe Vorzeichen hat wie für denjenigen Theil der ersten kante, welche nicht zwischen diesen belegen ist.

Wenn bei $U=0$ sämmtliche Ableitungen von U nach $s_{,}$ allein verschwinden, wobei die Linie $U=0$ ihrer ganzen Ausdehnung nach mit der betreffenden $s_{,}$-Linie zusammenfällt, so hat die erste Evolutenschale eine sanduhrförmige Verjüngung, deren engste Stelle punktförmig ist, also eine Art Spitze bildet, durch welche sämmtliche $s_{,,}$-Linien der Schale von dem einen Theile nach dem anderen hindurchtreten.

Wenn aber auf der ganzen Fläche die Gleichung $U=0$ besteht, so muss eine solche Verjüngung für alle $s_{,}$-Linien bestehen, d. h. die $s_{,}$-Schale degenerirt zu einer Linie. Da nun weiter, wenn $D_{,}-D_{,,} \gtrless 0$ ist, eine $s_{,,}$-Linie dieser Schale niemals eine unendlich grosse Krümmung haben kann, so muss die Fokallinie, welche die $s_{,}$-Schale ersetzt, mit sämmtlichen $s_{,,}$-Linien dieser Schale zusammenfallen und folglich überall die Polare der $s_{,}$-Linien der Fläche berühren. Hieraus geht hervor, dass eine ganze $s_{,}$-Linie eine gemeinsame Polare haben muss oder m. a. W., dass die $s_{,}$-Linien einfach gekrümmte Linien sind, was auch aus der Bedingung $\Psi'=0$ bei $U=0$ folgt. Unter solchen Umständen können aber die $s_{,}$-Linien als Schnittlinien aufgefasst werden zwischen je zwei Sphären, deren Krümmungsmittelpunkte beide auf der Fokallinie liegen und einander unendlich nahe sind, und die Fläche als die einhüllende Fläche einer Sphäre mit veränderlichem Durchmesser, deren Centrum längs der Fokallinie sich bewegt. Diese Flächen, die sog. allgemeinen Canalflächen sind also die einzigen, welche eine wirkliche Fokallinie besitzen. Für die Fokallinie geben die gewöhnlichen Ausdrücke $\vartheta, \frac{1}{R_{,,}'}, \frac{1}{R_{*}'}$ die Neigung gegen die Normale an, sowie die Krümmungen der Projektionen auf die YZ-Ebene bezw. auf die auf dieser senkrechten Ebene, welche die Tangente der Linie enthält.

Ist in einer solchen Fläche gleichzeitig überall $W=0$, wobei die $s_{,,}$-Linien geodätische Linien werden, so ist auch überall $\frac{1}{R_{,,}'}=0$ und $\frac{1}{R_{*}'}=0$ d. h. die Fläche ist eine Umdrehungsfläche, deren Achse die Fokallinie bildet.

Ist wiederum überall sowohl $U=0$ wie auch $V=0$, so haben sämmtliche $s_{,}$-Kreise der Fläche gleiche Durchmesser, und die Fläche

kann einestheils durch Bewegung einer unveränderlichen Sphäre erzeugt werden, anderentheils aber auch als »moulure» entstehen, indem die $s_{\prime\prime}$-Schale bei $V=0$ eine abwickelbare Fläche bildet.

Soll in einer Fläche $U=0$ gleichzeitig eine zweite Fokallinie existiren, so muss erstens überall $\mathfrak{W}=0$ sein. Beide Schaaren von Krümmungslinien sind dann ebene Kreise. Hierbei muss aber entweder überall $V=0$ oder $W=0$ sein, wie leicht einzusehen ist. Wenn nämlich $V \gtrless 0$ ist, so bilden die Flächennormalen längs einer $s_{\prime}$-Linie einen geraden Kegel mit cirkulärer Basis. Sollen sich nun die verschiedenen Kegel, welche den verschiedenen $s_{\prime}$-Linien entsprechen, und deren Spitzen in die erste Fokallinie fallen, alle in einer und derselben Linie schneiden können, so müssen sie eine und dieselbe Achse haben oder m. a. W., die erste Fokallinie muss gerade sein, was der Bedingung $W=0$ gleichkommt. Da somit neben $U=\mathfrak{W}=0$ auf der ganzen Fläche entweder $V=0$ oder $W=0$ sein muss, so ist die eine Fokallinie immer eine gerade und die Fläche eine Umdrehungsfläche. Wenn wir die Alternative $V=0$ wählen, so ist die zweite Fokallinie gerade, und für die erste gilt $R_{\prime\prime}'=\varrho_{\prime\prime}-\varrho_{\prime}$. Diese stellt also einen Kreis dar, dessen Polare die zweite Brennlinie ist, und die Fläche wird durch die Bewegung einer unveränderlichen Sphäre erzeugt, dessen Centrum längs einem ebenen Kreis gleitet.

Wenn in einem gegebenen Punkte $U=\mathfrak{W}=0$, Φ' und Φ'' aber von Null verschieden sind, so existirt in diesem Punkte ein Krümmungsmaximum bezw. Minimum in Bezug auf beide Hauptkrümmungslinien, und er ist ein Scheitel- oder Polpunkt im allgemeinen Sinne. Falls nun weder V längs der ganzen $s_{\prime}$-Linie noch W längs der ganzen $s_{\prime\prime}$-Linie verschwindet, so geht durch den Scheitelpunkt keine Symmetrieebene der Fläche. Ist nur die eine dieser Bedingungen erfüllt, so geht nur eine solche Symmetrieebene durch den Punkt, während die Erfüllung beider den Punkt als einen Scheitelpunkt im beschränkten Sinne charakterisirt, in welchem sich zwei Symmetrieebenen der Fläche unter rechten Winkeln schneiden. Alle drei Arten von Scheitelpunkten kommen auf der menschlichen Hornhaut vor. Für die letzte Art, im Flächenelemente durch die Bedingung $U=V=W=\mathfrak{W}=\Psi=\Psi''=0$ charakterisirt, wollen wir die geometrische Bedeutung von $\Phi'\,\Phi''\,\Omega'$ und Ω'' etwas näher untersuchen. Zunächst wollen wir die Bedingung dafür erforschen, dass die gegebene Fläche im fraglichen Punkte eine vollständige Berührung vierter Ordnung mit dem Scheitelpunkte einer Fläche zweiten Grades hat.

Durch Differentiation der Flächengleichung

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{2z}{c}$$

finden wir für $x=y=z=0$

$$d^2z=\frac{c}{a^2}dx^2+\frac{c}{b^2}dy^2$$

$$d^4z=\frac{3(d^2z)^2}{c}=3c\left(\frac{dx^4}{a^4}+\frac{2\,dx^2dy^2}{a^2b^2}+\frac{dy^4}{b^4}\right)$$

d. h.

$$r=\frac{c}{a^2} \qquad t=\frac{c}{b^2}$$

$$\partial^{40}=\frac{3c}{a^4} \qquad \partial^{22}=\frac{c}{a^2b^2} \qquad \partial^{04}=\frac{3c}{b^4}$$

$$-\frac{\Phi'}{3D_{,}^3}=-\frac{\Omega''}{D_{,}^2D_{,,}}=\frac{c^2-a^2}{c^2} \qquad -\frac{\Phi''}{3D_{,,}^3}=-\frac{\Omega'}{D_{,}D_{,,}^2}=\frac{c^2-b^2}{c^2}$$

Es geht hieraus einerseits hervor, dass die Bedingung für eine vollständige Berührung vierter Ordnung mit dem Scheitelpunkte einer Fläche zweiten Grades im Coordinatensystem $p=q=s=0$

$$\frac{\partial^{40}}{r^2}=\frac{3\partial^{22}}{rt}=\frac{\partial^{04}}{t^2}$$

oder allgemein

$$\frac{\Phi'}{D_{,}}=\frac{3\Omega''}{D_{,,}} \qquad \frac{\Phi''}{D_{,,}}=\frac{3\Omega'}{D_{,}} \qquad \Phi'\Phi''=9\Omega'\Omega''$$

ist, so wie auch andererseits, dass, wenn Φ' und $D_{,}$ bezw. Φ'' und $D_{,,}$ verschiedene Zeichen haben, die Zahlen $-\frac{\Phi'}{3D_{,}^3}$ bezw. $-\frac{\Phi''}{3D_{,,}^3}$ allgemein die Quadrate der Excentricitäten jener conischen Sectionen darstellen, welche mit den beiden durch den Scheitelpunkt der gegebenen Fläche hindurchgehenden Krümmungslinien eine vollständige Berührung vierter Ordnung haben. Wenn Φ' und $D_{,}$ bezw. Φ'' und $D_{,,}$ dasselbe Vorzeichen haben, geben die Werthe $\frac{\Phi'}{3D_{,}^3}$ bezw. $\frac{\Phi''}{3D_{,,}^3}$ gemäss oben-

stehendem Ausdrucke die Achsen derjenigen Ellipsen, welche mit ihren Punkten kleinster Krümmung die erwähnte Berührung haben. Während also in diesem Falle die Krümmung im Scheitelpunkte ein Minimum darstellt, ist in jenem, vo ein Maximum der Krümmung stattfindet, die osculirende conische Section eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel, je nachdem $\Phi' + 3D_{,}^{3} \gtreqless 0$ bezw. $\Phi'' + 3D_{,,}^{3} \gtreqless 0$ ist. Auf diese Weise haben wir die geometrische Bedeutung von Φ' und Φ'' als das Maass der positiven oder negativen Abflachung des Flächenelementes in der Richtung der beiden Hauptkrümmungslinien veranschaulicht.

Um eine einigermassen ähnliche Veranschaulichung der geometrischen Bedeutung von Ω' und Ω'' zu gewinnen, wollen wir die Fläche

$$\frac{x^2}{2a_{,}z + k_{,}z^2} + \frac{y^2}{2a_{,,}z + k_{,,}z^2} = 1$$

untersuchen. Auf den ersten Blick sehen wir, dass sowohl die Durchschnitte dieser Fläche mit der XZ- und der YZ-Ebene als auch sämmtliche zur XY-Ebene parallel geführten Schnitte conische Sectionen darstellen. Aber während in einer Fläche zweiten Grades letztere eine und dieselbe Excentricität haben, ist diese hier von dem Werthe von z abhängig. Während die Osculation mit einer Fläche zweiten Grades ein gewisses Verhältniss zwischen Φ' Φ'' $D_{,}$ und $D_{,,}$ bedingt, so ist eine Osculation mit dieser Fläche von einer solchen Bedingung unabhängig. Wir finden:

$$d^2z = \frac{1}{a_{,}}dx^2 + \frac{1}{a_{,,}}dy^2$$

$$d^4z = -3\left\{\frac{k_{,}}{a_{,}^3}dx^4 + \frac{k_{,}a_{,,} + k_{,,}a_{,}}{a_{,}^2 a_{,,}^2}dx^2dy^2 + \frac{k_{,,}}{a_{,,}^3}dy^4\right\}$$

d. h.

$$\frac{\partial^{40}}{r^2} + \frac{\partial^{04}}{t^2} = \frac{6\,\partial^{22}}{rt}$$

woraus durch Subtraktion beiderseits mit $3(r + t)$ resultirt

$$\frac{\Phi'}{D_{,}^2} + \frac{\Phi''}{D_{,,}^2} = \frac{3(\Omega' + \Omega'')}{D_{,}D_{,,}}$$

Dies ist also die Bedingung dafür, dass die in der Nähe des Scheitelpunktes einer Fläche parallel zur Tangentialebene geführten Schnitte bis auf unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung als der vierten conische Sectionen darstellen. Wenn $\Omega' + \Omega''$ bei positiven Werthe von $D_{,}$ und $D_{,,}$ einen grösseren Werth hat als den dieser Bedingung entsprechenden, so ist das Flächenelement in den diagonalen Richtigungen zwischen den Hauptnormalebenen relativ mehr zusammengebogen als ein solches, in welchem ein in der Nähe des Scheitelpunktes zur Tangentialebene parallel gelegter Schnitt eine Ellipse darstellt. Im entgegengesetzten Falle ist es in den genannten Richtungen relativ mehr ausgebogen.

Obwohl hierdurch die geometrische Bedeutung von $\Omega' + \Omega''$ für den allgemeinen Fall numerisch nicht in derselben Weise festgestellt worden ist, wie es mit Φ' und Φ'' geschehen konte, so glaube ich sie doch für den vorliegenden Zweck hinreichend veranschaulicht zu haben.

---

2. Die allgemeine Constitution des Strahlenbündels.

Da für den vorliegenden Zweck nur solche Strahlenbündel in Frage kommen, welche durch Brechung oder Spiegelung des ursprünglich von einem Punkte ausgehenden Lichtes in einfachbrehende Medien begrenzenden Flächen entstehen, und welche demnach gemäss dem bekannten MALUS'schen Theoreme Normalenbündel sind, so werden wir uns bei unserer Untersuchung der allgemeinen Constitution eines Strahlenbündels auf solche Normalenbündel beschränken. Wie wir in einem anderen Capitel sehen werden, erhalten wir, wenn wir die Eigenschaften des einfallenden Strahlenbündels und der brechenden Fläche kennen, die Eigenschaften des gebrochenen in der Weise, dass wir die geometrischen Eigenschaften der Wellenfläche nach der Brechung eruiren. Wie wir im vorigen Capitel sahen, kennen wir dadurch die Evolute vollständig, so weit ihre Eigenschaften von den Differentialquotienten bis zur vierten Ordnung der Flächengleichung abhängen, indem nämlich die vier Grössen $R' \vartheta_, \vartheta_{,,} R''$ der Evolute von den geometrischen Grössen $UVWW$ der Wellenfläche bezw. von den Differentialquotienten dritter Ordnung der Flächengleichung, und die sechs Grössen $R' \frac{dR'}{d\sigma_,'}$ l' $\frac{1}{R_{,,}'}$ $\frac{1}{R_,''}$ l'' $R'' \frac{dR''}{d\sigma_{,,}''}$ der Evolute von den geometrischen Grössen $\Phi' \Psi' \Omega' \Omega'' \Psi'' \Phi''$ zusammen mit den früher genannten bezw. von den Differentialquotienten bis zur vierten Ordnung der Flächengleichung vollständig und eindeutig bestimmt sind, wobei nur die besprochene Relation zwischen $\frac{1}{R_{,,}'}$ und $\frac{1}{R_,''}$ zu beachten ist. Man könnte nun meinen, die Eigenschaften des Strahlenbündels wären hierdurch gegeben, aber es treten bei der Untersuchung desselben einige Gesichtspunkte in den Vordergrund, welche bei der Untersuchung der Fläche nicht berücksichtigt worden sind. Zunächst haben wir bei dieser ein von den Krümmungslinien einer bestimmten Wellenfläche abhängiges Coordinatensystem $s_, s_{,,}$ angewandt. Für das Strahlenbündel als solches

ist es aber in gewisser Hinsicht vortheilhafter, ein Coordinatensystem anzuwenden, welches allen Wellenflächen gemeinsam, also von der Lage einer bestimmten solchen unabhängig ist. Weiter haben wir die Begrenzungslinie in den verschiedenen Regionen des Strahlenbündels zu untersuchen, wenn eine Begrenzungslinie auf der Wellenfläche gegeben ist, und ebenso unter derselben Bedingung die Begrenzungslinien auf den beiden Evolutenschalen. Bei dieser Gelegenheit haben wir auch das Verhalten zwischen der Wirklichkeit und der allgemein als zutreffend erachteten Hypothese von dem Sturm'schen Conoid mit den zwei Brennlinien zu untersuchen. Ebenso wie wir im vorigen Capitel durch die Untersuchung der geometrischen Eigenschaften einer Fläche in einem bestimmten Punkte nicht nur die Geometrie des Flächenelementes studirt haben, sondern auch daraus allgemeine Eigenschaften der Flächen deducirt haben, so werden wir auch jetzt durch die Untersuchung des Strahlenbündels in der Nähe eines bestimmten Strahles nicht nur die Constitution des unendlich dünnen Strahlenbündels finden, sondern auch allgemeine Eigenschaften der Strahlenbündel feststellen.

Hierbei werden wir folgende Bezeichnungen einführen:

$$A' = -R' \frac{dR'}{d\sigma_{,}'} = \frac{\Phi'}{D_{,}^4} - \frac{3\,U^2}{D_{,}^5}$$

$$B' = -\frac{R'(\varrho_{,,} - \varrho_{,})}{l' \cos \vartheta_{,}} = \frac{\Psi'(D_{,} - D_{,,})}{D_{,}^3 D_{,,}} - \frac{U V}{D_{,}^4 D_{,,}}$$

$$C' = -\frac{(\varrho_{,,} - \varrho_{,})^2}{R_{,}'' \cos^3 \vartheta_{,,}} = \frac{\Omega'}{D_{,}^2 D_{,,}^2} - \frac{V(2V - W)}{D_{,}^2 D_{,,}^2 (D_{,} - D_{,,})}$$

$$C'' = -\frac{(\varrho_{,,} - \varrho_{,})^2}{R_{,,}' \cos^3 \vartheta_{,}} = \frac{\Omega''}{D_{,}^2 D_{,,}^2} - \frac{W(U - 2W)}{D_{,}^2 D_{,,}^2 (D_{,} - D_{,,})}$$

$$B'' = +\frac{R''(\varrho_{,,} - \varrho_{,})}{l'' \cos \vartheta_{,,}} = -\frac{\Psi''(D_{,} - D_{,,})}{D_{,} D_{,,}^3} - \frac{W W}{D_{,} D_{,,}^4}$$

$$A'' = -R'' \frac{dR''}{d\sigma_{,,}''} = \frac{\Phi''}{D_{,,}^4} - \frac{3\,W^2}{D_{,,}^5}$$

$$E = \varrho_{,,} - \varrho_{,} = C' - C'' = \frac{D_{,} - D_{,,}}{D_{,} D_{,,}} .$$

Wie wir sehen, sind sämmtliche Grössen $ABCE$ lineare geometrische Grössen, welche einestheils nur von bekannten geometrischen

Grössen der allen Wellenflächen gemeinsamen Evolute abhängen, anderentheils aber auch unmittelbar aus der Gleichung einer bekannten Wellenfläche erhalten werden können und wiederum die Differentialquotienten bis zur vierten Ordnung einer beliebigen Wellenfläche oder, was dasselbe ist, die Gleichung des betreffenden Flächenelementes bis auf unendlich kleine Grössen höherer Ordnung als der vierten augenblicklich geben. Zusammen mit den Werthen R' $E \operatorname{tg} \vartheta_{\prime}$, $E \operatorname{tg} \vartheta_{\prime\prime}$, R'', welche auch lineare geometrische Grössen darstellen, bestimmen sie das Strahlenbündel in der Nähe des gegebenen Strahles vollkommen und eindeutig. Da alle diese Grössen selbständig und unabhängig variiren können mit der Ansnahme, dass

$$E = C' - C''$$

ist, was unmittelbar aus dem Werthe von $\Omega' - \Omega''$ hervorgeht, so wird also das Strahlenbündel durch zehn unabhängige Variabele bestimmt. Da aber diejenigen Strahlenbündel, für welche $E = 0$ ist, ein besonderes Capitel erheischen, und die Bedingung $E < 0$ nur einem Wechsel der positiven Richtung längs dem Hauptstrahle bezw. einer Permutation der Indices gleichkommt, so werden wir hier $E > 0$ annehmen.

Wie wir bei der Untersuchung der Evolute gesehen haben, bilden die Flächennormalen längs den Krümmungslinien ebene oder abwickelbare Flächen, indem sie die Tangenten einer einfach oder doppelt gekrümmten Linie darstellen, und ein Strahlenbündel besteht demnach aus einem doppelten Systeme von abwickelbaren Flächen, welche sich längs jedem einzelnen Strahle unter rechten Winkeln schneiden. Dass keine anderen Systeme von abwickelbaren Flächen im Strahlenbündel vorkommen, wird auf folgende Weise bewiesen.

Durch Differentiation der Normalengleichungen

$$\xi - x + p(\zeta - z) = 0$$

$$\eta - y + q(\zeta - z) = 0$$

nach x und y, wobei ζ unabhängig ist, finden wir, dass das Quadrat des Abstandes vom Hauptstrahl zu einem naheliegenden $d\xi^2 + d\eta^2$ im Coordinatensystem $p = q = s = 0$ nur dann verschwindet, wenn entweder gleichzeitig $\zeta = \frac{1}{r}$ und $dy = 0$ oder gleichzeitig $\zeta = \frac{1}{t}$ und $dx = 0$ ist. Da nun in einer abwickelbaren Fläche der kleinste Abstand zwischen zwei naheliegenden Generatricen immer von höherer Kleinheitsordnung ist



als der Abstand zwischen zwei beliebigen auf diesen Generatricen in endlicher Entfernung vom Locus des kleinsten Abstandes belegenen Punkten, so folgt hieraus, dass keine anderen Systeme von abwickelbaren Flächen im Strahlenbündel vorkommen können, als die den Krümmungslinien der Wellenfläche entsprechenden. Die Tangentialebenen der beiden sich längs einem bekannten Strahle schneidenden abwickelbaren Flächen nennen wir die *Hauptschnitte des Strahlenbündels*, welche also mit den Hauptnormalschnitten sämmtlicher zugehörigen Wellenflächen identisch sind. Für die positiven Richtungen dieser Hauptschnitte wählen wir dieselbe Orientirung wie für die Krümmungslinien, so dass wir, wenn wir in der Richtung von wachsenden Z schauen und die positive Richtung des ersten Hauptschnittes nach rechts haben, die Richtung nach oben als die positive Richtung des zweiten Hauptschnittes bezeichnen.

Um ein von der fraglichen Wellenfläche unabhängiges Coordinatensystem zu haben, können wir bei der Differentiation der Normalengleichungen im Coordinatensystem $p = q = s = 0$ p und q als unabhängige Variabele wählen, d. h. die Ableitungen nach den Tangenten der Winkel vornehmen, unter welchen ein Strahl die durch den Hauptstrahl gehenden Hauptschnitte des Strahlenbündels schneidet, wobei die positiven Richtungen von p und q aus dem oben Gesagten erhellen. Für gewisse Darstellungen ist es aber geeigneter, zwei andere unabhängige Variabele π und $\varkappa$ für die Flächengleichung zu wählen, welche wir so definiren, dass die Coordinatenlinien überall mit den Hauptkrümmungslinien zusammenfallen, und dass längs den beiden durch den Punkt $\pi = 0$ $\varkappa = 0$ durchgehenden Coordinatenlinien π bezw. $\varkappa$ gleich den Winkeln sind, welche die Normale im Punkte $\pi 0$ bezw. im Punkte $\varkappa 0$ nach ausbreitung der bezüglichen abwickelbaren Fläche in einer Ebene mit der Normale im Punkte $\pi = 0$ $\varkappa = 0$ bilden, oder was dasselbe bedeutet, dass die Bedingungen $ds_{,} = \varrho_{,} d\pi$ und $ds_{,,} = \varrho_{,,} d\varkappa$ erfüllt sind. Für die Uebergänge vom Coordinatensystem xy erhalten wir die Werthe $\frac{\partial^2 x}{\partial \pi \partial \varkappa}$ $\frac{\partial^2 x}{\partial \varkappa^2}$ $\frac{\partial^2 y}{\partial \pi^2}$ $\frac{\partial^2 y}{\partial \pi \partial \varkappa}$ auf dieselbe Weise wie die entsprechenden Differentialquotienten nach $s_{,} s_{,,}$. Während aber $\frac{\partial^2 x}{\partial s_{,}^2}$ und $\frac{\partial^2 y}{\partial s_{,,}^2}$ gleich Null sind, finden wir durch Differentiation der Gleichung

$$d\sigma_{,} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \pi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \pi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \pi}\right)^2}\, d\pi$$

sowie aus der analogen für $d\sigma_{\prime\prime}$ die Werthe $\frac{\partial^2 x}{\partial \pi^2}$ und $\frac{\partial^2 y}{\partial \varkappa^2}$. Es ergiebt sich also für den Punkt $\pi = 0 \quad \varkappa = 0$

$$dx = \frac{d\pi}{r} \qquad\qquad dy = \frac{d\varkappa}{t}$$

$$d^2x = -\frac{u}{r^3}\,d\pi^2 - \frac{2v}{rt(r-t)}\,d\pi\,d\varkappa - \frac{w}{t^2(r-t)}\,d\varkappa^2$$

$$d^2y = \frac{v}{r^2(r-t)}\,d\pi^2 + \frac{2w}{rt(r-t)}\,d\pi\,d\varkappa - \frac{u}{t^3}\,d\varkappa^2$$

sowie

$$d^2s_{\prime} = -R'\,d\pi^2 \qquad\qquad d^2s_{\prime\prime} = -R''\,d\varkappa^2 \,.$$

Wenn wir nun die allgemeinen Bezeichnungen

$$d\tau_{\prime} = D_{\prime}\,d\sigma_{\prime} \qquad\qquad d\tau_{\prime\prime} = D_{\prime\prime}\,d\sigma_{\prime\prime}$$

einführen, so sind Ableitungen nach $d\tau_{\prime}$ oder nach $d\tau_{\prime\prime}$ ebenso wie diejenigen nach $d\sigma_{\prime}$ oder $d\sigma_{\prime\prime}$ rein geometrische vom Coordinatensystem unabhängige Grössen. Da wir nun im Punkte $\pi = \varkappa = 0$ $d\tau_{\prime} = d\pi$ und $d\tau_{\prime\prime} = d\varkappa$ haben, so finden wir diese geometrischen Grössen durch Ableitung nach π und $\varkappa$. Von den allgemeinen Beziehungen, welche auf diese Weise mit Hilfe der im vorigen Capitel abgeleiteten Werthen erhalten werden können wollen wir folgende anführen:

$$\frac{d\varrho_{\prime}}{d\tau_{\prime}} = -R' \qquad\qquad \frac{d\varrho_{\prime\prime}}{d\tau_{\prime\prime}} = -R''$$

$$\frac{d\varrho_{\prime}}{d\tau_{\prime\prime}} = -E\operatorname{tg}\vartheta_{\prime} \qquad\qquad \frac{d\varrho_{\prime\prime}}{d\tau_{\prime}} = E\operatorname{tg}\vartheta_{\prime\prime}$$

$$\frac{dR'}{d\tau_{\prime}} = -\frac{d^2\varrho_{\prime}}{d\tau_{\prime}^2} = A' \qquad\qquad \frac{dR''}{d\tau_{\prime\prime}} = -\frac{d^2\varrho_{\prime\prime}}{d\tau_{\prime\prime}^2} = A''$$

$$E\,\frac{d\operatorname{tg}\vartheta_{\prime}}{d\tau_{\prime}} = \frac{dR'}{d\tau_{\prime\prime}} - 2R'\operatorname{tg}\vartheta_{\prime} = B' \qquad -E\,\frac{d\operatorname{tg}\vartheta_{\prime\prime}}{d\tau_{\prime\prime}} = \frac{dR''}{d\tau_{\prime}} - 2R''\operatorname{tg}\vartheta_{\prime\prime} = B''$$

$$E\left(\frac{d\operatorname{tg}\vartheta_{\prime}}{d\tau_{\prime\prime}} - \operatorname{tg}^2\vartheta_{\prime}\right) = C' \qquad -E\left(\frac{d\operatorname{tg}\vartheta_{\prime\prime}}{d\tau_{\prime}} - \operatorname{tg}^2\vartheta_{\prime\prime}\right) = C'' \,.$$

Sämmtliche Werthe sind leicht zu erhalten. Bei der Differentiation von tg $\vartheta_,$ geht man am bequemsten von Werthe $\frac{1}{D_, R'}$ aus. Bei Ermittelung des Werthes $\frac{dR'}{d\tau_{,,}}$ beachte man die Bemerkung auf Seite 8. Aus den beiden Werthen C' und C'' erhellt das für alle Normalenbündel allgemeingiltige Gesetz:

$$\frac{d\,\mathrm{tg}\,\vartheta_,}{d\tau_{,,}} + \frac{d\,\mathrm{tg}\,\vartheta_{,,}}{d\tau_,} = 1 + \mathrm{tg}^2\vartheta_, + \mathrm{tg}^2\vartheta_{,,}$$

welches eine Art Umschreibung des LIOUVILLE'schen Satzes darstellt.

Ebenso wie wir bei der Untersuchung der Fläche das Coordinatensystem $s_, s_{,,}$ nur für die Ableitungen benützten, ohne die Differentialquotienten anzugeben, welche zur Entwickelung der Flächengleichung nach Potenzen von $s_,$ und $s_{,,}$ nöthig sind, sondern uns mit der Möglichkeit einer solchen Entwickelung von z nach x und y begnügten, ebenso wollen wir bei der Differentiation der Normalengleichungen die Ableitungen theils nach x und y, theils nach p und q ausführen, so dass die Gleichung einer Normale nach Potenzen von dem einen oder anderen dieser Paare von Variabelen erhalten werden kann, je nachdem das Strahlenbündel in Zusammenhang mit einer bestimmten Wellenfläche oder für sich allein untersucht wird.

Wir erhalten für $p = q = s = 0$

$$d\xi = dx - \zeta dp$$

$$d^2\xi = d^2x - \zeta d^2p$$

$$d^3\xi = d^3x - \zeta d^3p + 3\,dp\,d^2z$$

und finden, indem wir beachten, dass die Identitäten

$$dp = r\,dx$$

$$d^2p = u\,dx^2 + 2v\,dx\,dy + w\,dy^2 + r\,d^2x$$

$$d^3p = \partial^{40}dx^3 + 3\partial^{31}dx^2dy + 3\partial^{22}dx\,dy^2 + \partial^{13}dy^3 + 3u\,dx\,d^2x +$$
$$+ 3v\,dy\,d^2x + 3v\,dx\,d^2y + 3w\,dy\,d^2y + r\,d^3x$$

bestehen, und nach Ausführung der ähnlichen Operation in Bezug auf η einestheils für x und y als unabhängige Variabele:

$$d\xi = (1 - \zeta r)dx \qquad\qquad d\eta = (1 - \zeta t)dy$$

$$d^2\xi = -\zeta(u dx^2 + 2v dx dy + w dy^2) \qquad d^2\eta = -\zeta(v dx^2 + 2w dx dy + u dy^2)$$

$$d^3\xi = -(\zeta\partial^{40} - 3r^2)dx^3 - 3\zeta\partial^{31}dx^2dy - 3(\zeta\partial^{22} - rt)dx dy^2 - \zeta\partial^{13}dy^3$$

$$d^3\eta = -\zeta\partial^{31}dx^3 - 3(\zeta\partial^{22} - rt)dx^2dy - 3\zeta\partial^{13}dx dy^2 - (\zeta\partial^{04} - 3t^2)dy^3$$

anderentheils aber auch, wenn p und q unabhängig variiren, wobei wir die Coordinaten der Fokalpunkte mit $00\zeta_,$ bezw. $00\zeta_{,,}$ bezeichnen, nach zwar umständlicher aber leicht ausführbarer Rechnung:

$$d\xi = (\zeta_, - \zeta)dp$$

$$d^2\xi = R'dp^2 - 2E \operatorname{tg}\vartheta_, dp dq + E \operatorname{tg}\vartheta_{,,} dq^2$$

$$d^3\xi = -\{A' - 3E\operatorname{tg}^2\vartheta_,\}dp^3 - 3\{B' + 2R'\operatorname{tg}\vartheta_, + 3E\operatorname{tg}\vartheta_,\operatorname{tg}\vartheta_{,,}\}dp^2dq -$$

$$-3\{C'' + 2E(\operatorname{tg}^2\vartheta_, - \operatorname{tg}^2\vartheta_{,,}) - R'\operatorname{tg}\vartheta_{,,} - R''\operatorname{tg}\vartheta_,\}dp dq^2 -$$

$$-\{B'' + 2R'\operatorname{tg}\vartheta_{,,} - 3E\operatorname{tg}\vartheta_,\operatorname{tg}\vartheta_{,,}\}dq^3$$

nebst analogen Werthen für η.

Mit Hilfe dieser Werthe können wir nun die Gleichungen der Normale unter Benutzung der Differentialquotienten der Flächengleichung im Coordinatensystem $p = q = s = 0$ nach Potenzen von x und y oder unter Benutzung der das Strahlenbündel als solches charakterisirenden geometrischen Grössen nach Potenzen von p und q entwickeln. Die so erhaltenen Gleichungen repräsentiren, wenn x und y bezw. p und q als Parameter variiren, einen soliden Körper, dessen Begrenzungsflächen von den Variationsgrenzen der Parameter abhängen. Wenn nur der eine Parameter variirt, so entsteht eine geradlinige Fläche, z. B. eine y-Fläche, wenn man x einen constanten Werth zuertheilt. Aber weder die x- und y-Flächen noch die p- und q-Flächen sind im allgemeinen Falle abwickelbar. In Gleichungen aber, welche π und $\varkappa$ als Parameter enthielten, würden die π- und $\varkappa$-Flächen abwickelbar sein. Obwohl wir nun nicht diese Gleichungen entwickeln, was eine unnöthige Complication darstellen würde, machen wir doch von diesem Coordinatensysteme bei gewissen Ableitungen Gebrauch. Für den Uebergang vom Coordinatensystem pq zu demjenigen nach $\pi\varkappa$ brauchen wir nur den schon angedeuteten Uebergang von pq nach xy mit dem angeführten von xy nach $\pi\varkappa$ zusammenzustellen. Wir erhalten auf diese Weise:

$$dp = d\pi \qquad dq = d\varkappa$$

$$d^2p = -2 \operatorname{tg} \vartheta_, d\pi d\varkappa + \operatorname{tg} \vartheta_{,,} d\varkappa^2$$

$$d^2q = \operatorname{tg} \vartheta_, d\pi^2 - 2 \operatorname{tg} \vartheta_{,,} d\pi d\varkappa \ .$$

Dem in der Lehre von den Aberrationen eines in einer Rotationsfläche gebrochenen ursprünglich homocentrischen Strahlenbündels vorkommenden Ausdruck »laterale Aberration» müssen offenbar im allgemeinen Strahlenbündel zwei Ausdrücke entsprechen. Wenn wir als die ideale Form eines nicht astigmatischen Strahlenbündels mit Recht die des homocentrischen aufstellen, und die Aberrationen als Abweichungen von der Homocentricität bezeichnen, so können wir für das astigmatische Strahlenbündel, in welchem E von Null verschieden ist, zwar kaum als ideale Form das Sturm'sche Conoid mit den zwei auf einander senkrechten Brennlinien ansehen, da dieses, wie schon aus den Untersuchungen im vorigen Capitel hervorgeht, niemals existiren kann, aber wir können, um einen einfachen, leicht verständlichen Ausgangspunkt zu gewinnen, die Abweichungen von dieser Form als Aberrationen bezeichnen, wobei aber ausdrücklich bemerkt werden muss, dass ein astigmatisches Strahlenbündel niemals aberrationsfrei ist. Wir bezeichnen also als *erste laterale Aberration* eines bestimmten Strahles die Abscisse ξ des Schnittpunktes dieses Strahles mit der durch den ersten Fokalpunkt senkrecht zum Hauptstrahle gelegten Ebene $\zeta = \zeta_,$ und als *zweite laterale Aberration* desselben Strahles die Ordinate η des Schnittpunktes dieses Strahles mit der durch den zweiten Fokalpunkt gelegten Ebene $\zeta = \zeta_{,,}$. Da nicht alle Strahlen des Strahlenbündels die beiden Hauptschnitte treffen, weil schon die Bedingung $d^2\xi = 0$ bezw. $d^2\eta = 0$ in den Normalengleichungen eine Gleichung zwischen $dy\,dx$ und d^2x bezw. d^2y giebt, aber jeder von ihnen die beiden durch den Hauptstrahl gehenden abwickelbaren Flächen schneidet, so bezeichnen wir als *erste longitudinale Aberration* eines bestimmten Strahles den Abstand seines Schnittpunktes mit der durch den Hauptstrahl gehenden $\varkappa$-Fläche von der Ebene $\zeta = \zeta_,$ und als *zweite longitudinale Aberration* den Abstand seines Schnittpunktes mit der durch den Hauptstrahl gehenden π-Fläche von der Ebene $\zeta = \zeta_{,,}$.

Wenn in den Gleichungen der Normale $\zeta = \frac{1}{r} = \zeta_,$ gesetzt wird, so wird $d\xi = 0$, und $d^3\xi$ enthält nicht mehr d^3x bezw. d^3p, wonach wir aus den oben gegebenen Werthen die Ableitungen nach $s_, s_{,,}$

bezw. $\pi\varkappa$ vornehmen können. Wir erhalten auf diese Weise für die *erste laterale Aberration* eines Strahles:

$$d\xi = 0$$

$$d^2\xi = -\frac{1}{D_{,}}\{U ds_{,}^2 + 2V ds_{,} ds_{,,} + W ds_{,,}^2\}$$

$$d^3\xi = -\frac{\Phi'}{D_{,}} ds_{,}^3 - \frac{3\Psi'(D_{,} - D_{,,})}{D_{,}} ds_{,}^2 ds_{,,} -$$

$$-\frac{3}{D_{,}}\left\{\Omega'' - \frac{V\mathfrak{W} + W(U - 2W)}{D_{,} - D_{,,}}\right\} ds_{,} ds_{,,}^2 +$$

$$+\frac{1}{D_{,}}\left\{\Psi''(D_{,} - D_{,,}) + \frac{2W\mathfrak{W}}{D_{,} - D_{,,}}\right\} ds_{,,}^3$$

sowie auch:

$$d^2\xi = -R' d\pi^2 - 2E \operatorname{tg}\vartheta_{,} d\pi\, d\varkappa + E \operatorname{tg}\vartheta_{,,} d\varkappa^2$$

$$d^3\xi = -A' d\pi^3 - 3B' d\pi^2 d\varkappa - 3(C'' - R'' \operatorname{tg}\vartheta_{,}) d\pi\, d\varkappa^2 - (B'' + 2R'' \operatorname{tg}\vartheta_{,,}) d\varkappa^3.$$

Die analogen Werthe für die zweite laterale Aberration findet man auf ähnliche Weise oder am einfachsten durch Permutation von Indices, wobei aber zu beachten ist, dass E das Vorzeichen wechselt.

Um die longitudinalen Aberrationen eines Strahles zu finden, müssen wir zuerst die Bedingungen untersuchen, unter welchen sich überhaupt zwei Normalen schneiden können. Wir gehen dabei von der Flächengleichung aus und bezeichnen die Coordinaten eines auf der Fläche liegenden Punktes mit $x_{,} y_{,} z_{,}$ diejenigen eines anderen Punktes mit $x_{,,} y_{,,} z_{,,}$. Im ersten Punkte haben die Differentialquotienten der Flächengleichung die Werthe $p_{,} q_{,} \ldots\ldots$, im zweiten $p_{,,} q_{,,} \ldots\ldots$ Da wir ferner, wie immer, das Coordinatensystem $p = q = s = 0$ anwenden und Origo als Limeslage beider Punkte betrachten, so ist $dp_{,} = r dx_{,}$ $dp_{,,} = r dx_{,,}$ u. s. w. Die Coordinaten des Schnittpunktes der durch die beiden Punkte gehenden Normalen bezeichnen wir mit $\xi\eta\zeta$, welche also abhängige Variabele sind. Die Normalengleichungen geben unmittelbar als Bedingung dafür, dass die beiden durch die zwei Flächenpunkte gehenden Normalen sich schneiden:

$$\zeta(p_{,} - p_{,,}) = x_{,} - x_{,,} + p_{,} z_{,} - p_{,,} z_{,,} \qquad \zeta(q_{,} - q_{,,}) = y_{,} - y_{,,} + q_{,} z_{,} - q_{,,} z_{,,}$$

oder nach Differentiation für $x_{,} = y_{,} = x_{,,} = y_{,,} = 0$:

$$(1 - \zeta r)(dx_{,} - dx_{,,}) = 0 \qquad (1 - \zeta t)(dy_{,} - dy_{,,}) = 0$$

d. h. entweder

$$\zeta = \frac{1}{r} \qquad dy_{,} = dy_{,,}$$

oder auch

$$\zeta = \frac{1}{t} \qquad dx_{,} = dx_{,,}$$

woraus hervorgeht, dass in einem unendlich dünnen Strahlenbündel Schnittpunkte zwischen zwei Strahlen überhaupt nur in unendlich kleiner Entfernung von den beiden Fokalpunkten vorkommen, und dass von den vier Variabelen $x_{,} y_{,} x_{,,} y_{,,}$ nur drei unabhängig sind. Im folgenden werden wir uns zunächst den Schnittpunkten in der Nähe vom ersten Fokalpunkte zuwenden, also $\zeta = \frac{1}{r}$ setzen und $y_{,,}$ als abhängige Variabele ansehen. Um den Uebergang auf die Ableitungen nach anderen unabhängigen Variabelen zu erleichtern, werden wir dabei die Werthe d^2x etc. nicht vernachlässigen. Ausser den soeben angegebenen, nach Elimination von ξ und η aus den vier Normalengleichungen erhaltenen, bilden wir noch eine durch Elimination von ζ, nehmen eine der Normalengleichungen mit und gehen also von folgenden vier Gleichungen aus:

$$\zeta(p_{,} - p_{,,}) = x_{,} - x_{,,} + p_{,} z_{,} - p_{,,} z_{,,} \qquad \zeta(q_{,} - q_{,,}) = y_{,} - y_{,,} + q_{,} z_{,} - q_{,,} z_{,,}$$

$$\xi(p_{,} - p_{,,}) = p_{,} x_{,,} - p_{,,} x_{,} - p_{,} p_{,,}(z_{,} - z_{,,}) \qquad \eta = y_{,} - q_{,}(\zeta - z_{,}) \; .$$

Durch zweimalige Differentiation der beiden ersten dieser Gleichungen erhalten wir:

$$d\zeta = \frac{d^2 x_{,} - d^2 x_{,,} - \zeta(d^2 p_{,} - d^2 p_{,,})}{2(dp_{,} - dp_{,,})}$$

$$\zeta(d^2 q_{,} - d^2 q_{,,}) + 2 d\zeta(dq_{,} - dq_{,,}) = d^2 y_{,} - d^2 y_{,,} \; .$$

Nach Einsetsen von $\zeta = \frac{1}{r}$ und $dy_{,,} = dy_{,}$ finden wir zuerst den Werth von $d\zeta$, dann denjenigen von $d^2 y_{,,}$. Durch nochmalige Differentiation ergiebt sich:

$$d^2\zeta = \frac{d^3x_{,} - d^3x_{,,} - \zeta(d^3p_{,} - d^3p_{,,}) - 3\,d\zeta(d^2p_{,} - d^2p_{,,}) + 3\,dp_{,}d^2z_{,} - 3dp_{,,}d^2z_{,,}}{3(dp_{,} - dp_{,,})}$$

sowie durch successive Differentiationen:

$$d\xi = \frac{dp_{,}dx_{,,} - dp_{,,}dx_{,}}{dp_{,} - dp_{,,}} = 0$$

$$d^2\xi = \frac{dp_{,}d^2x_{,,} - dp_{,,}d^2x_{,} + d^2p_{,}dx_{,,} - d^2p_{,,}dx_{,}}{dp_{,} - dp_{,,}}$$

$$d^3\xi = \{2(dp_{,}d^3x_{,,} - dp_{,,}d^3x_{,}) + 3(d^2p_{,}d^2x_{,,} - d^2p_{,,}d^2x_{,}) +$$

$$+ 2(d^3p_{,}dx_{,,} - d^3p_{,,}dx_{,}) - 3\,d^2\xi(d^2p_{,} - d^2p_{,,}) -$$

$$- 6\,dp_{,}dp_{,,}(d^2z_{,} - d^2z_{,,})\} : 2(dp_{,} - dp_{,,})$$

$$d\eta = dy_{,} - \zeta dq_{,}$$

$$d^2\eta = d^2y_{,} - \zeta d^2q_{,} - 2\,d\zeta dq_{,}\ .$$

Nach Ausführung der ziemlich umständlichen Rechnungen finden wir unter den Bedingungen:

$$\zeta = \frac{1}{D_{,}} \qquad\qquad dy_{,,} = dy_{,}$$

$$d^2y_{,,} = -\frac{V}{D_{,} - D_{,,}}(dx_{,}^2 - dx_{,,}^2) - \frac{2W}{D_{,} - D_{,,}}(dx_{,} - dx_{,,})dy_{,} + d^2y_{,}$$

für die Coordinaten des Schnittpunktes zweier Strahlen:

$$d\xi = 0 \qquad\qquad d\eta = \frac{D_{,} - D_{,,}}{D_{,}}dy_{,}$$

$$d\zeta = -\frac{U}{2D_{,}^2}(dx_{,} + dx_{,,}) - \frac{V}{D_{,}^2}dy_{,} \qquad\qquad d^2\xi = \frac{U}{D_{,}}dx_{,}dx_{,,} - \frac{W}{D_{,}}dy_{,}^2$$

$$d^2\eta = -\frac{V}{D_{,}}dx_{,}^2 - \frac{2W}{D_{,}}dx_{,}dy_{,} + \frac{UD_{,,}}{D_{,}^2}(dx_{,} + dx_{,,})dy_{,} +$$

$$+ \frac{2VD_{,,} - WD_{,}}{D_{,}^2}dy_{,}^2 + \frac{D_{,} - D_{,,}}{D_{,}}d^2y_{,}$$

$$d^2\zeta = -\frac{\Phi'}{3D_,^2}(dx_,^2 + dx_,dx_{,,} + dx_{,,}^2) + \frac{U^2}{2D_,^3}(dx_, + dx_{,,})^2 -$$

$$-\frac{1}{D_,^2}\left\{\Psi'(D_, - D_{,,}) + \frac{UVD_{,,}}{D_,(D_, - D_{,,})}\right\}(dx_, + dx_{,,})dy_, -$$

$$-\frac{1}{D_,^2}\left(\Omega'' + \frac{2W^2}{D_, - D_{,,}}\right)dy_,^2 - \frac{U}{2D_,^2}(d^2x_, + d^2x_{,,}) - \frac{V}{D_,(D_, - D_{,,})}d^2\eta$$

$$d^3\xi = \left(\frac{\Phi'}{D_,} - \frac{3U^2}{2D_,^2}\right)dx_,dx_{,,}(dx_, + dx_{,,}) +$$

$$+ 3\left\{\frac{\Psi'(D_, - D_{,,})}{D_,} + \frac{UV(D_, + D_{,,})}{D_,^2(D_, - D_{,,})}\right\}dx_,dx_{,,}dy_, +$$

$$+ \frac{3UW(D_, + D_{,,})}{2D_,^2(D_, - D_{,,})}(dx_, + dx_{,,})dy_,^2 + \left\{\frac{\Psi''(D_, - D_{,,})}{D_,} - \frac{VW}{D_,(D_, - D_{,,})} +\right.$$

$$\left. + \frac{3VWD_{,,}}{D_,^2(D_, - D_{,,})}\right\}dy_,^3 + \frac{3U}{2D_,}(dx_{,,}d^2x_, + dx_,d^2x_{,,}) - \frac{3W}{D_, - D_{,,}}dy_,d^2\eta \ .$$

In den Ausdrücken für $d^2\zeta$ und $d^3\xi$ habe ich $d^2\eta$ statt $d^2y_,$ eingesetzt, weil die Ausdrücke dadurch symmetrisch und etwas einfacher werden, und die Uebergänge auf Ableitungen nach anderen Variabelen ebenso leicht von $d^2\eta$ als von $d^2y_,$ aus geschehen.

Zunächst constatiren wir durch Einsetzen von

$$dx_, = dx_{,,} = ds_, \qquad dy_, = dy_{,,} = ds_{,,}$$

$$d^2x_, = d^2x_{,,} = -\frac{2V}{D_, - D_{,,}}ds_,ds_{,,} - \frac{W}{D_, - D_{,,}}ds_{,,}^2$$

$$d^2y_, = \frac{V}{D_, - D_{,,}}ds_,^2 + \frac{2W}{D_, - D_{,,}}ds_,ds_{,,}$$

dass die Formeln identisch werden mit den im vorigen Capitel für die Evolute angegebenen bezw. mit der für $d^3\xi$ nach der S. 24 angegebenen Methode erhaltenen — ein Ausdruck dafür, dass die Evolute den Locus der Limeslage von den Schnittpunkten zweier sich infinite nähernden Normalen darstellt, und dafür, dass sich in die beschwerliche Rechnung kein Fehler eingeschlichen hat.

Um dann zu untersuchen, welche Strahlen den Haptstrahl schneiden, setzen wir $dx_{,} = dy_{,} = d^2y_{,} = 0$ und finden: $d^2y_{,,} = \frac{V}{D_{,} - D_{,,}} dx^2_{,,}$ d. h. die geradlinie Fläche, welche von denjenigen Strahlen gebildet wird, die den Hauptstrahl schneiden, hat längs diesem eine Berührung zweiter Ordnung mit der der ersten Hauptkrümmungslinie entsprechenden abwickelbaren Normalfläche. Daraus können wir aber nicht den Schluss ziehen, dass sich zwei Strahlen, welche einer und derselben abwickelbaren Normalfläche angehören, wirklich schneiden. Im Gegentheil, wenn wir die obige Rechnung noch einen Schritt weiter führen, finden wir:

$$d^3y_{,,} = \left(\Psi' - \frac{UV}{2(D_{,} - D_{,,})^2}\right) dx^3_{,,}$$

d. h. die fragliche geradlinige Fläche hat im allgemeinen Falle, wo U und V von Null verschieden sind, keine Berührung höherer Ordnung als der zweiten mit der abwickelbaren Normalfläche, und zwei Normalen, welche einer und derselben abwickelbaren Normalfläche angehören, schneiden sich im allgemeinen Falle nicht, sondern ihr kleinster Abstand wird, wenn sie sich unendlich nahe kommen, nur ein Unendlichkleines dritter Ordnung. Wenn die Evolute eine Spitze hat, wird dieser Abstand ein Unendlichkleines der vierten Ordnung. Da nämlich eine abwickelbare Fläche die Tangentenfläche ihrer Kantlinie darstellt, und folglich die osculirenden Ebenen der Hauptkrümmungslinie und der Kantlinie in entsprechenden Punkten immer zusammenfallen, so muss, falls für jene $ds_{,} = dx$ ist für diese $\frac{d\eta}{d\xi} = 0$ sein. Da nun η und ξ als Funktionen von $s_{,}$ gegeben und $\frac{d\eta}{ds_{,}} = \frac{d\xi}{ds_{,}} = 0$ sind, so ist dieser Bedingung im allgemeinen Fall, wo $\frac{d^2\xi}{ds_{,}^2}$ von Null verschieden ist, durch die allgemeingiltige Beziehung $d^2\eta = 0$ genügt. Wenn aber bei $U = 0$ $\frac{d^2\xi}{ds_{,}^2} = 0$ ist, so verlangt sie $d^3\eta = 0$. Diese Thatsachen, auf die wir in einem folgenden Capitel zurückkommen, gehen übrigens schon aus den Gleichungen der Evolute hervor, indem für die $s_{,}$-Linie der $s_{,}$-Schale $d^2\eta = 0$ ist, $d^3\eta$ aber gemäss den angegebenen Werthen für Krümmung und Torsion dieser Linie von Null verschieden sein

muss. wofern nicht U oder V gleich Null sind. Die Evolute ist also im allgemeinen Falle nicht ein Locus für Schnittpunkte zwischen zwei consecutiven Strahlen, sondern ein Locus für die Limeslagen dieser Schnittpunkte: sie begrenzt nach der einen Seite hin den Raum, in welchem Schnittpunkte vorkommen.

Um nun den Schnittpunkt zwischen einem gegebenen Strahle und der durch den Hauptstrahl gehenden $\varkappa$-Fläche zu finden, setzen wir in den allgemeinen Gleichungen für die Schnittpunkte zweier Strahlen einestheils:

$$dx_{,} = 0 \qquad dx_{,,} = ds_{,} \qquad dy_{,} = dy_{,,} = ds_{,,}$$

$$d^2x_{,} = -\frac{W}{D_{,} - D_{,,}}\,ds_{,,}^2 \qquad d^2x_{,,} = -\frac{2V}{D_{,} - D_{,,}}\,ds_{,}ds_{,,} - \frac{W}{D_{,} - D_{,,}}\,ds_{,,}^2$$

$$d^2y_{,,} = \frac{V}{D_{,} - D_{,,}}\,ds_{,}^2 + \frac{2W}{D_{,} - D_{,,}}\,ds_{,}ds_{,,}$$

anderentheils auch

$$dx_{,} = 0 \qquad dx_{,,} = \frac{d\pi}{D_{,}}$$

$$dy_{,} = dy_{,,} = \frac{d\varkappa}{D_{,,}} \qquad d^2x_{,} = -\frac{W}{D_{,,}^2(D_{,} - D_{,,})}\,d\varkappa^2$$

$$d^2x_{,,} = -\frac{U}{D_{,}^3}\,d\pi^2 - \frac{2V}{D_{,}D_{,,}(D_{,} - D_{,,})}\,d\pi\,d\varkappa - \frac{W}{D_{,,}^2(D_{,} - D_{,,})}\,d\varkappa^2$$

$$d^2y_{,,} = \frac{V}{D_{,}^2(D_{,} - D_{,,})}\,d\pi^2 + \frac{2W}{D_{,}D_{,,}(D_{,} - D_{,,})}\,d\pi\,d\varkappa - \frac{W}{D_{,,}^3}\,d\varkappa^2$$

wobei also der Punkt $x_{,}y_{,}$ auf der zweiten Hauptkrümmungslinie liegt, und der Punkt $x_{,,}y_{,,}$ unabbängig variirt, und erhalten für die *erste longitudinale Aberration* eines Strahles:

$$d\zeta = -\frac{U}{2D_{,}^2}\,ds_{,} - \frac{V}{D_{,}^2}\,ds_{,,}$$

$$d^2\zeta = -\frac{1}{D_{,}^2}\left(\frac{\Phi'}{3} - \frac{U^2}{2D_{,}}\right)ds_{,}^2 - \frac{1}{D_{,}^2}\left(\Psi'(D_{,} - D_{,,}) - \frac{UV(D_{,} - 2D_{,,})}{D_{,}(D_{,} - D_{,,})}\right)ds_{,}ds_{,,} -$$

$$-\frac{1}{D_{,}^2}\left(\Omega' - D_{,}D_{,,}(D_{,} - D_{,,}) - \frac{2V^2}{D_{,}}\right)ds_{,,}^2$$

sowie:

$$d\zeta = -\frac{R'}{2}\,d\pi - E\,\mathrm{tg}\,\vartheta_{,}dx$$

$$d^2\zeta = -\frac{A'}{3}\,d\pi^2 - (B' + R'\,\mathrm{tg}\,\vartheta_{,})\,d\pi\,dx - (C'' - R''\,\mathrm{tg}\,\vartheta_{,} + 2E\,\mathrm{tg}^2\vartheta_{,})\,dx^2$$

aus welchen Werthen wir durch Permutation die analogen Werthe für die *zweite longitudinale Aberration* eines Strahles erhalten.

In der Lehre von der sogenannten sphärischen Aberration bei Brechung eines axialen Strahlenbündels in centrirten Rotationsflächen pflegt man ausser den lateralen und longitudinalen Aberrationen eines Strahles auch die Lage und Grösse des kleinsten Zerstreuungskreises zu untersuchen. Diesem entsprechen im allgemeinen Strahlenbündel zwei dünnste Querschnitte, von denen je einer in der Nähe von jedem Fokalpunkte belegen ist, und welche, falls R' bezw. R'' von Null verschieden sind, nach der einen Seite hin von der bezüglichen Schale der Evolute, nach der anderen von einer Furche begrenzt werden. Wenn aber die Evolute bei Verschwinden von R' bezw. R'' im bezüglichen Fokalpunkte eine Kante hat, so wird der zugehörige dünnste Querschnitt nach beiden Seiten hin von Furchen begrenzt.

Um nun die Lage und Form dieser Furchen kennen zu lernen, müssen wir zuerst den verschiedenen Arten der Begrenzung eines Strahlenbündels unsere Aufmerksamkeit zuwenden. Bei der Brechung von homocentrischem Lichte in centrirten Rotationsflächen liegt die Sache sehr einfach da immer eine kreisförmige Begrenzungslinie entweder auf der Wellenfläche oder in einer das Strahlenbündel schneidenden Ebene erhalten wird, das Diaphragma mag vor oder hinter der brechenden Fläche applicirt sein, oder die Begrenzung mag durch die Fassung dieser zu Stande kommen. Anders aber im allgemeinen Fall, wo die brechenden Flächen keine Rotationsflächen sind. Hier kann zwar eine kreisförmige Begrenzungslinie in einer das Strahlenbündel schneidenden Ebene vorkommen, wenn das Diaphragma hinter der letzten brechenden Fläche sich befindet, aber schon wenn die Fassung der brechenden Fläche als Diaphragma fungirt, ist diese eine doppelt gekrümmte Linie, nämlich die Schnittlinie zwischen der brechenden Fläche und einer cylindrischen, und wenn das Diaphragma vor der brechenden Fläche sitzt, ist sie die Schnittlinie zwischen dieser und einer conischen. Wenn noch dazu das einfallende Licht nicht homocentrisch ist, so kann die Begrenzungslinie des gebrochenen Strahlenbündels die

verschiedensten Formen aufweisen. Unter allen Umständen erhalten wir aber, da wir in der Flächengleichung die Differentialquotienten bis zur vierten Ordnung mitnehmen, Kenntniss von der Form der Begrenzungslinie auf der Wellenfläche durch eine Gleichung vierten Grades bezw. durch die entsprechenden Differntialgleichungen, wie wir des Näheren in einem folgenden Capitel sehen werden.

Wenn wir nun zu den allgemeinen Gleichungen einer Normale diejenigen hinzufügen, welche zusammen mit der Flächengleichung die Begrenzungslinie charakterisirt, so erhalten wir nach Elimination von z drei Gleichungen zwischen $\xi\eta\zeta$ und xy, welche also der von den die Begrenzungslinie schneidenden Strahlen gebildeten Fläche entsprechen. Nun ist aber in diesen Gleichungen für $\zeta = \frac{1}{r}$ $d\xi = 0$ und für $\zeta = \frac{1}{t}$ $d\eta = 0$. Die Fläche hat also in der Nähe von den beiden Fokalpunkten je eine Doppellinie. Eine solche Fläche, welche als durch eine gerade Linie erzeugt gedacht werden kann, die längs einer geschlossenen Linie — der Begrenzungslinie — herumgeführt wird und dabei immer durch zwei bestimmte Linien — die Doppellinien — geht, bezeichnen wir allgemein als ein Conoid.

Bei der ersten Evolutenschale schneiden sich alle $\varkappa$-Flächen, bei der zweiten alle π-Flächen; andere Schnittpunkte kommen nicht vor. Es muss also ein Strahl, welcher durch die Begrenzungslinie geht, überall der Begrenzungsfläche des Strahlenbündels angehören, ausser in der Nähe der Fokalpunkte. Wenn wir nun die Begrenzungslinie mehr und mehr einengen, so entsprechen den verschiedenen Begrenzungslinien verschiedene Conoide, welche alle die beiden Evolutenschalen berühren müssen. Die äussere Begrenzungsfläche des Strahlenbündels besteht also aus dem der Begrenzungslinie entsprechenden Conoide und den beiden Evolutenschalen, und sämmtliche Schnittpunkte von Strahlen befinden sich im Raume zwischen der bezüglichen Evolutenschale und demjenigen Theile des Conoides, welcher durch die Berührungslinie dieses mit der Evolutenschale abgegrenzt und durch die bezügliche Doppellinie in zwei Hälften getheilt wird. Wenn die Evolute keine Kante hat, bilden also die Strahlenschnittpunkte einen soliden Körper mit drei Oberflächen und zwei Kanten. Die eine der Kanten ist die Doppellinie des Grenzconoides, die andere ist die Berührungslinie von diesem mit der Evolute. In diesem Falle entspricht die Doppellinie einer Furche auf der Oberfläche des Strahlenbündels, der erste dünnste Querschnitt liegt zwischen dieser Furche und der

gegenüberliegenden Evolute, und die Schnittpunkte der Strahlen liegen ausserhalb des Grenzconoides. Hat aber die Evolute eine Kante, so wird der von den Strahlenschnittpunkten gebildete solide Körper von vier Oberflächen, die in drei Kanten zusammenstossen, begrenzt, und zwar ist die Evolutenkante eine vorspringende, die ihr gegenüberstehende, von der Doppellinie des Grenzconoides gebildete, eine eingesenkte. Während im allgemeinen Falle das Grenzconoid nur eine Berührungslinie gemeinsam mit der Evolute hat, so existirt in diesem ausserdem eine Schnittlinie, welche beiderseits die dem ersten dünnsten Querschnitt entsprechende Furche des Strahlenbündels bildet. Ein Theil der Strahlenschnittpunkte befindet sich hierbei innerhalb des Grenzconoides.

Nach diesen einleitenden Bemerkungen, welche die Rolle der Doppellinien des Conoides erläutern, gehen wir zur Untersuchung dieser über. In dem Ausdrucke für die Schnittpunkte zweier Normalen haben wir die beiden Bedingungen dafür einzusetzen, dass die Punkte $x_, y_,$ $x_{,,} y_{,,}$ auf der Linie liegen, die das Grenzconoid aus der Wellenfläche abschneidet, und deren Gleichungen durch die Gleichungen der Wellenfläche und einer sie schneidenden cylindrischen ersetzt werden können. Diese letztere, welche also nicht z enthält, ist im allgemeinen Falle von der Form $R^2 = x^2 + by^2 +$ Glieder mit x^3 x^2y xy^2 y^3 $x^4 \dots$ etc., wobei b positives Vorzeichen hat. Wenn wir in dieser Gleichung R als Parameter betrachten und von Null aus variiren lassen, so erhalten wir nach zweimaliger Differentiation und nachheriger Einsetzung von $x = y = R = 0$

$$dx^2 + b\,dy^2 = dR^2$$

sowie durch successive Differentiationen die Differentialgleichungen höherer Ordnungen. Um die Doppellinie zu studiren, brauchen wir aber nur die Differentialgleichungen bis zur zweiten Ordnung, da weder d^3x noch d^3y in den Ausdrücken für die Schnittpunkte der Normalen vorkommen. Diese Gleichung zwischen x y und R und die beiden Normalengleichungen, auf die beiden Werthpaare $x_, y_,$ $x_{,,} y_{,,}$ angewendet, geben zusammen sechs Gleichungen zwischen den acht Variabelen $x_,$ $y_, x_{,,} y_{,,} \xi \eta \zeta R$, von welchen also nur zwei unabhängig variiren können. Hierzu wählen wir η und R. Allgemein folgt aus der Gleichung

$$dx_,^2 + b\,dy_,^2 = dx_{,,}^2 + b\,dy_{,,}^2$$

da $dy_{,} = dy_{,,}$ ist, und die Bedingung $dx_{,} = dx_{,,}$, wie oben gezeigt wurde, auf die Evolute führt:

$$dx_{,} + dx_{,,} = 0$$

sowie aus $d^2\eta = 0$ und aus der Gleichung zwischen $d^2y_{,}$ und $d^2y_{,,}$

$$d^2y_{,} = \frac{V}{D_{,} - D_{,,}} dx_{,}^2 + \frac{2WD_{,}}{(D_{,} - D_{,,})^2} dx_{,} d\eta - \frac{D_{,}(2VD_{,,} - WD_{,})}{(D_{,} - D_{,,})^3} d\eta^2$$

$$d^2y_{,,} = d^2y_{,} - \frac{4WD_{,}}{(D_{,} - D_{,,})^2} dx_{,} d\eta$$

wonach aus den Gleichungen zwischen $d^2x_{,}$ und $d^2y_{,}$ bezw. zwischen $d^2x_{,,}$ und $d^2y_{,,}$, welche aus den Gleichungen der Begrenzungslinie hergeleitet werden, auch $d^2x_{,}$ und $d^2x_{,,}$ bekannt sind.

Wenn wir die bezügliche Differentialgleichung allgemein

$$dx\,d^2x + b\,dy\,d^2y + k_{,}dx^3 + k_{,,}dx^2dy + k_{,,,}dx\,dy^2 + k_{,,,,}dy^3 = 0$$

schreiben, so finden wir für $dx_{,} + dx_{,,} = 0$ und $dy_{,} = dy_{,,}$:

$$d^2x_{,} + d^2x_{,,} = -b\frac{dy_{,}}{dx_{,}}(d^2y_{,} - d^2y_{,,}) - 2k_{,}dx_{,}^2 - 2k_{,,,}dy_{,}^2 =$$

$$= -2k_{,}dx_{,}^2 - \frac{2D_{,}^2}{(D_{,} - D_{,,})^3}\left(2bW + k_{,,,}(D_{,} - D_{,,})\right)d\eta^2$$

$$dx_{,,}d^2x_{,} + dx_{,}d^2x_{,,} = b\,dy_{,}(d^2y_{,} + d^2y_{,,}) + 2k_{,,}dx_{,}^2dy_{,} + 2k_{,,,,}dy_{,}^3 =$$

$$= \frac{2D_{,}}{(D_{,} - D_{,,})^2}\{bV + k_{,,}(D_{,} - D_{,,})\}dx_{,}^2d\eta +$$

$$+ \frac{2D_{,}^2}{(D_{,} - D_{,,})^4}\{bWD_{,} - 2bVD_{,,} + k_{,,,,}D_{,}(D_{,} - D_{,,})\}d\eta^3$$

wonach wir für *die erste Doppellinie* eines Conoides erhalten.

$$d\xi = 0$$

$$d\zeta = -\frac{V}{D_{,}(D_{,} - D_{,,})}d\eta$$

$$d^2\xi = -\frac{U}{D_{,}}dx_{,}^2 - \frac{WD_{,}}{(D_{,} - D_{,,})^2}d\eta^2$$

$$d^2\zeta = -\frac{\Phi' - 3k_{,}U}{3D_{,}^2}dx_{,}^2 - \frac{1}{(D_{,} - D_{,,})^2}\left\{\Omega'' - \frac{2W(bU - W)}{D_{,} - D_{,,}} - k_{,,,}U\right\}d\eta^2$$

$$d^3\xi = -3\left\{\Psi' + \frac{UV(D_{,,} + (1-b)D_{,})}{D_{,}(D_{,} - D_{,,})^2} - \frac{k_{,,}U}{D_{,} - D_{,,}}\right\} dx_{,}^2 d\eta + \frac{\partial^3\xi}{\partial\eta^3} d\eta^3$$

Das nicht ausgeführte Glied $\frac{\partial^3\xi}{\partial\eta^3}$ brauchen wir nicht. Es enthält ausser Ψ'' und $k_{,,,,}$ verschiedene Producte aus b und den ersten Ableitungen der Hauptkrümmungen. In diesen allgemeinen Werthen haben wir nun den Coefficienten b und k ihre jeweilige Werthe zu geben und $dx_{,}^2$ durch dR^2 zu ersetzen, wonach uns die partiellen Differentialquotienten nach R das Mittel geben, durch Entwickeln von ξ und ζ nach Potenzen von R die Coordinaten des Schnittpunktes von der Doppellinie mit der XZ-Ebene zu finden und die partiellen Differentialquotienten nach η die Limeswerthe angeben, welche die Neigung und Krümmung der Projektionen der Doppellinien auf die XY- und YZ-Ebene annehmen, wenn R gegen Null hin abnimmt. Aus $\frac{\partial^3\xi}{\partial R^2\partial\eta}$ endlich erhalten wir die Aenderung der Neigung gegen die YZ-Ebene bei von Null aus wachsendem Werthe von R.

Für eine kreisförmige Abblendung auf der Wellenfläche ist z. B $b = 1$, und es verschwinden sämmtliche Coefficienten k, wonach wir für den Schnittpunkt der Doppellinie mit der XY-Ebene

$$\xi = -\frac{R^2 U}{2D_{,}} \qquad \zeta = \zeta_1 - \frac{R^2\Phi'}{6D_{,}^2}$$

und für die Projektion auf die beiden anderen Coordinatenebenen

$$\frac{d\xi}{d\eta} = -\frac{R^2}{2}\left(\Psi' + \frac{UVD_{,,}}{D_{,}(D_{,} - D_{,,})^2}\right) \qquad \frac{d\zeta}{d\eta} = -\frac{V}{D_{,}(D_{,} - D_{,,})}$$

$$\frac{d^2\xi}{d\eta^2} = \frac{D_{,}(U-W)}{(D_{,} - D_{,,})^2} \qquad \frac{d^2\zeta}{d\eta^2} = \frac{1}{3(D_{,} - D_{,,})^2}\left\{\Phi' - 3\Omega'' + \frac{6W(U-W)}{D_{,} - D_{,,}}\right\}$$

erhalten.

Wir sehen aus diesen Ausdrücken und aus den analogen für die zweite Doppellinie, dass die Kenntniss von der Führungslinie und den Doppellinien eines Conoides ausreicht, um zusammen mit den Oertern der Fokalpunkte das Strahlenbündel zu bestimmen. Um auf diese Weise das Strahlenbündel an sich ohne Bezug auf irgend eine bestimmte Wellenfläche zu charakterisiren, kann man die Doppellinien des Grenzconoides bei kreisförmiger Blende an bestimmtem Platze, z. B. auf halbem Abstande zwischen den beiden Fokalpunkten, bestim-

men. Die einfachsten Ausdrücke bekommt man aber für das Conoid

$$\pi^2 + \varkappa^2 = \omega^2$$

wobei wir nach Einsetzen von $D_,^2 dR^2 = d\omega^2$ sowie

$$b = \frac{D_{,,}^2}{D_,^2} \qquad k_, = \frac{U}{D_,} \qquad k_{,,} = \frac{V(2D_,^2 - D_{,,}^2)}{D_,^2(D_, - D_{,,})} \qquad k_{,,,} = \frac{W(D_,^2 - 2D_{,,}^2)}{D_,^2(D_, - D_{,,})}$$

welche Werthe unmittelbar hervorgehen aus den für den Uebergang vom Coordinatensystem $\pi\varkappa$ nach dem System xy angegebenen, auf die Gleichung $d\pi d^2\pi + d\varkappa d^2\varkappa = 0$ angewendeten Formeln, folgende Werthe finden:

$$\xi = -\frac{\omega^2}{2} . R' \qquad\qquad \zeta = \zeta_, - \frac{\omega^2}{6} . A'$$

$$\frac{d\xi}{d\eta} = -\frac{\omega^2}{2} . \frac{B'}{E} \qquad\qquad \frac{d\zeta}{d\eta} = -\operatorname{tg}\vartheta_,$$

$$\frac{d^2\xi}{d\eta^2} = \frac{R'}{E^2} + \frac{\operatorname{tg}\vartheta_{,,}}{E} \qquad\qquad \frac{d^2\zeta}{d\eta^2} = \frac{A' - 3C''}{3E^2}$$

In einfachster Weise kommen hier die das Strahlenbündel charakterisirenden geometrischen Eigenschaften durch die beiden Doppellinien des Conoides zum Ausdruck.

Wie schon erwähnt, repräsentiren die Doppellinien des Grenzconoides nur dann die Furchen des Strahlenbündels, wenn die bezüglichen Evoluten ohne Kanten sind. Wenn aber z. B. $U = 0$ ist, so schneidet die erste Doppellinie der Conoide, bis auf unendlich kleine Grössen höherer Ordnung als der dritten, den Hauptstrahl, und die Furchen werden von den Schnittlinien des Conoides mit der Evolute gebildet. Diese Schnittlinien finden wir auf folgende Weise. Wir fassen zwei Normalen ins Auge, deren Schnittpunkt auf der Evolute liegt, und von denen die eine dem Grenzconoid angehört und die Wellenfläche im Punkte $x_, y_,$ trifft, die andere, Tangente der Evolute, die Wellenfläche im Punkte $x_{,,} y_{,,}$ schneidet. Bei $\eta = 0$ gilt für diese:

$$d^2\zeta = -\frac{\Phi'}{D_,^2} dx_{,,}^2 \qquad\qquad d^3\xi = \frac{2\Phi'}{D_,} dx_{,,}^3$$

Für den Schnittpunkt zweier Normalen haben wir aber allgemein bei $\eta = 0$ und $U = 0$

$$d^2\zeta = -\frac{\Phi'}{3D_,^2}(dx_,^2 + dx_, dx_{,,} + dx_{,,}^2) \qquad d^3\xi = \frac{\Phi'}{D_,} dx_, dx_{,,}(dx_, + dx_{,,})$$

wonach wir durch Zusammensetzung dieser Ausdrücke bei $\Phi' \gtrless 0$ die Bedingungsgleichung

$$dx_{,}^2 + dx_{,} dx_{,,} - 2\,dx_{,,}^2 = 0$$

d. h.

$$dx_{,} = -2\,dx_{,,}$$

finden und dann nach Einsetzen in die allgemeinen Gleichungen für die Schnittpunkte folgende Werthe für die Furchen erhalten:

$$d\xi = 0 \qquad d\zeta = -\frac{V}{D_{,}(D_{,}-D_{,,})}\,d\eta \qquad d^2\xi = -\frac{W D_{,}}{(D_{,}-D_{,,})^2}\,d\eta^2$$

$$d^2\zeta = -\frac{\Phi'}{4D_{,}^2}\,dx_{,}^2 - \frac{\Psi'}{2D_{,}}\,dx_{,}d\eta - \frac{1}{(D_{,}-D_{,,})^2}\left(\Omega'' + \frac{2W^2}{D_{,}-D_{,,}}\right)d\eta^2$$

$$d^3\xi = -\frac{\Phi'}{4D_{,}}\,dx_{,}^3 - \frac{3\Psi'}{2}\,dx_{,}^2 d\eta + \frac{\partial^3\xi}{\partial\eta^3}\,d\eta^3$$

Bei der Entwickelung nach Potenzen von R bei $\eta = 0$ beachte man, dass $x_{,} = \pm R$ ist, wobei das obere Zeichen diejenige der beiden Furchen bezeichnet, welche dem nach der Richtung von positiver x auf der Wellenfläche belegenen Theil der Begrenzungslinie entspricht. Für eine kreisförmige Abblendung auf der Wellenfläche finden wir:

$$\xi = \mp\frac{R^3\Phi'}{24D_{,}} \qquad \zeta = \zeta_{,} - \frac{R^2\Phi'}{8D_{,}^2} \qquad \frac{d\xi}{d\eta} = -\frac{R^2\Psi'}{4}$$

$$\frac{d\zeta}{d\eta} = -\frac{V}{D_{,}(D_{,}-D_{,,})} \mp \frac{R\Psi'}{4D_{,}} \qquad \frac{d^2\xi}{d\eta^2} = -\frac{WD_{,}}{(D_{,}-D_{,,})^2} \pm \frac{R\Phi' D_{,}}{12(D_{,}-D_{,,})^2}$$

$$\frac{d^2\zeta}{d\eta^2} = \frac{1}{4(D_{,}-D_{,,})^2}\left(\Phi' - 4\Omega'' - \frac{8W^2}{D_{,}-D_{,,}}\right)$$

und für das Conoid $\pi^2 + x^2 = \omega^2$:

$$\xi = \mp\frac{\omega^3 A'}{24} \qquad \zeta = \zeta_{,} - \frac{\omega^2 A'}{8}$$

$$\frac{d\xi}{d\eta} = -\frac{\omega^2 B'}{4E} \qquad \frac{d\zeta}{d\eta} = -\operatorname{tg}\vartheta_{,} \mp \frac{\omega B'}{4E}$$

$$\frac{d^2\xi}{d\eta^2} = \frac{\operatorname{tg}\vartheta_{,,}}{E} \pm \frac{\omega A'}{12E^2} \qquad \frac{d^2\zeta}{d\eta^2} = \frac{A' - 4C''}{4E^2}$$

Um die *Querschnitte des Conoides mit den verschiedenen zur Tangentialebene der Wellenfläche parallelen Ebenen* zu finden, haben wir nur die bezüglichen Differentialgleichungen der Begrenzungslinie oder, falls das Conoid durch eine Gleichung zwischen p und q bestimmt ist, die durch successive Differentiationen von dieser erhaltenen mit den durch Differentiation der Normalengleichungen nach x und y bezw. nach p und q gefundenen zu combiniren. Ist die erste Differentialgleichung der Begrenzungslinie

$$dx^2 + b\,dy^2 = dR^2$$

so ist die erste der fraglichen Schnittlinie

$$\frac{d\xi^2}{(1-\zeta r)^2} + b\,\frac{d\eta^2}{(1-\zeta t)^2} = dR^2$$

die nächste enthält $d\xi d^2\xi\ d\eta d^2\eta\ d\xi^3$ u. s. w. Aus diesen erhalten wir leicht die Gleichung

$$R^2 = \frac{\xi^2}{(1-\zeta r)^2} + \frac{b\eta^2}{(1-\zeta t)^2} + \cdots$$

in welcher wir die unendlich kleinen Grössen bis zur vierten Ordnung mitzunehmen haben. Nur wenn $1-\zeta r$ bezw. $1-\zeta t$ unendlich kleine Werthe haben, d. h. für die Querschnitte in der Nähe von den Fokalpunkten, ist diese Methode unanwendbar. Für diesen Fall erhalten wir aus den beiden Normalengleichungen, indem wir $R\eta\zeta$ als unabhängige Variabele behandeln und $\zeta = \frac{1}{r}$ setzen, die nöthigen Mittel, um bei $\eta = 0$ $\xi, \frac{d\xi}{d\eta}$ und $\frac{d^2\xi}{d\eta^2}$ nach Potenzen von R oder ω zu entwickeln, wobei ζ als Parameter fungirt. Für den allgemeinen Fall dürfte es hinreichend sein, den Vorgang angedeutet zu haben. Für diejenigen Strahlenbündel, für welche sämmtliche Differentialquotienten dritter Ordnung in der Flächengleichung gleich Null sind, gestaltet sich die Rechnung sehr einfach folgendermassen:

$$d\xi = 0 \qquad d^2\xi = 0$$

$$d^3\xi = -\frac{\Phi'}{D_{\prime}}dx^3 - 3\,\Psi' dx^2 d\eta - \frac{3D_{\prime}\Omega''}{(D_{\prime}-D_{\prime\prime})^2}dx\,d\eta^2 + \frac{D_{\prime}^2\,\Psi''}{(D_{\prime}-D_{\prime\prime})^2}d\eta^3 - 3d^2p\,d\zeta$$

Da nun $d^2p = r\,d^2x$ und, wenn η unabhängige Variabele $d^2y = 0$ ist, so verschwindet $d\zeta$, wenn die Coefficienten k in der Gleichung der Begrenzungslinie sämmtlich gleich Null sind. Nach Einsetzen von

$dx^2 + b\,dy^2 = dR^2$ finden wir also für die Schnittpunkte mit der XZ-Ebene:

$$\xi = \mp \frac{R^3 \Phi'}{6 D_{,}} = \mp \frac{\omega^3 A'}{6} \qquad \frac{d\xi}{d\eta} = -\frac{R^2 \Psi'}{2} = -\frac{\omega^2 B'}{2E}$$

$$\frac{d^2\xi}{d\eta^2} = \pm \frac{R D_{,}(b\Phi' - 3\Omega'')}{(D_{,} - D_{,,})^2} = \pm \frac{\omega(b D_{,}^2 A' - 3 D_{,,}^2 C'')}{D_{,,}^2 E^2}$$

in welchen Ausdrücken für eine kreisförmige Abblendung auf der Wellenfläche $b = 1$, für das Conoid $\pi^2 + \varkappa^2 = \omega^2$ $b = \frac{D_{,,}^2}{D_{,}^2}$ zu setzen ist.

Eben dieselben Methoden geben uns die Gleichung der Berührungslinie eines Conoides mit einer Evolutenschale. Im allgemeinen Falle erhalten wir für die Berührungslinie auf der ersten Evolute

$$\frac{(d\zeta + \operatorname{tg}\vartheta_{,} d\eta)^2}{D_{,}^2 R'^2} + b \cdot \frac{d\eta^2}{D_{,,}^2 E^2} = dR^2$$

oder wenn die Tangenten der $s_{,}$- und $s_{,,}$-Linien Coordinatenachsen sind

$$\frac{d\sigma_{,}'^2}{D_{,}^2 R'^2} + b \cdot \frac{d\sigma_{,,}'^2 \cos^2\vartheta_{,}}{D_{,,}^2 E^2} = dR^2$$

wonach diejenige Figur, welcher sich die Projektion der Berührungslinie des Conoides mit der Evolute auf die YZ-Ebene bei abnehmendem Werthe von R nähert, eine Ellipse ist, in der die Tangenten der $s_{,}$- und $s_{,,}$-Linien der Evolute conjugirte Diameter sind. Aus der auf ähnliche Weise zu ermittelnden Beziehung zwischen $d^2\zeta$ und $d^2\eta$ können dann noch die Glieder dritter Ordnung der Gleichung der Berührungslinie erhalten werden. Für $R' = 0$ sind diese Ausdrücke nicht anwendbar, sondern wir finden aus den Gleichungen der Evolute, wie sie aus den Coordinaten für die Schnittpunkte der Normalen S. 43 hervorgehen, wenn wir $dx_{,} = dx_{,,}$ und $d^2\eta = 0$ setzen:

$$d\zeta = -\operatorname{tg}\vartheta_{,} d\eta \qquad d^2\xi = -\frac{W D_{,}}{(D_{,} - D_{,,})^2} d\eta^2$$

$$d^2\zeta = -\frac{\Phi'}{D_{,}^2} dx^2 - \frac{2\Psi'}{D_{,}} dx\,d\eta - \frac{1}{(D_{,} - D_{,,})^2}\left(\Omega'' + \frac{2W^2}{D_{,} - D_{,,}}\right) d\eta^2$$

$$d^3\xi = \frac{2\Phi'}{D_{,}} dx^3 + 3\Psi' dx^2 d\eta + \frac{\partial^3\xi}{\partial\eta^3} d\eta^3$$

wonach wir für die Schnittpunkte der beiden Linien mit der XZ-Ebene ξ ζ $\frac{d\xi}{d\eta}$ $\frac{d\zeta}{d\eta}$ $\frac{d^2\xi}{d\eta^2}$ $\frac{d^2\zeta}{d\eta^2}$ auf gewöhnliche Weise nach Potenzen von R bezw. ω entwickeln können.

Nach dieser allgemeinen Untersuchung des astigmatischen Strahlenbündels dürfte es am Platze sein, einige Vorschläge betreffs der Nomenclatur zu machen. Bei der Untersuchung der monochromatischen Aberration hat man sich bisher mit den Verhältnissen in centrirten optischen Systemen begnügt, wo die Aberration des gebrochenen Strahlenbündels durch eine einzige Quantität ausgedrückt werden konnte. Die Qualität des Strahlenbündels, welche durch diese gemessen wird, nennt man einfach »sphärische Aberration», und als Mass wird gewöhnlich die laterale oder longitudinale Aberration eines extremen Strahles angewendet. Dass diese einzige Benennung nicht mehr genügen kann, seitdem wir die verschiedenen Faktoren kennen, welche die allgemeine Form des Strahlenbündels bestimmen, leuchtet ohne weiteres ein. Andererseits ist offenbar eine einheitliche Nomenclatur wünschenswerth. In dieser Hinsicht scheint es mir vortheilhaft, für die nicht symmetrischen Abweichungen einfach das Wort Asymmetrie, für die symmetrischen im Strahlenbündel das Wort Aberration zu gebrauchen, betreffs der Fläche aber von Abflachung zu sprechen, wobei positives Vorzeichen eine Abflachung des Flächenelementes nach dem Centrum, negatives aber eine Abflachung nach der Peripherie hin bedeutet. Das Wort direkt beziehe ich auf die der bezüglichen Hauptkrümmungslinie entsprechende Hauptkrümmung, für die andere schlage ich das Wort transversal vor. Nach diesem Schema brauchen wir also *für ein astigmatisches Flächenelement* folgende Bezeichnungen: Die Differenz $D_{,} - D_{,,}$ drückt den Grad des Astigmatismus aus; von den Ableitungen der Hauptkrümmungen messen die Werthe U bezw. W die *direkte* bezw. *transversale Krümmungsasymmetrie*, die Werthe Φ' bezw. Ω'' die *direkte* bezw. *transversale Abflachung* längs der ersten Krümmungslinie, während die Werthe W V Φ'' Ω' die entsprechende Bedeutung für die zweite Hauptkrümmungslinie haben; die Werthe Ψ' und Ψ'' bezeichnen wir als *erste* bezw. *zweite Diagonalasymmetrie* mit Hinsicht auf die Correlation dieser Werthe und der Grössen $\frac{\partial^2 D_{,}}{\partial s_{,} \partial s_{,,}}$ bezw. $\frac{\partial^2 D_{,,}}{\partial s_{,} \partial s_{,,}}$. Von sämmtlichen Werthen ist nur $D_{,} - D_{,,}$ der reciproke Werth eines Linearmasses. Die Asymmetrienwerthe sind reciproke Werthe von Flächenmassen, die Werthe der Abflachung sind reciprok zu Kubikmassen.

Für das Strahlenbündel haben wir lauter lineare Masse: E ist die Brennstrecke, und es messen R' bezw. $-E \operatorname{tg} \vartheta_{,,}$ die *direkte* bezw. *transversale Asymmetrie*, A' bezw. C'' die *direkte* bezw. *transversale Aberration* in der ersten Hauptrichtung, während R'' $E \operatorname{tg} \vartheta_{,}$ A'' C' die ent-

sprechende Bedeutung für die zweite Hauptrichtung haben, und B' bezw. B'' die *erste* bezw. *zweite Diagonalasymmetrie des Strahlenbündels* messen.

Wenn wir also von A'.... als Massen der Aberrationen eines Strahlenbündels sprechen und anderseits die longitudinale bezw. laterale Aberration eines gewissen Strahles erörtert haben, so folgen wir nur der gebräuchlichen Terminologie der »sphärischen Aberration». Man spricht ja von homocentrischen Strahlenbündeln mit grosser oder geringer, positiver oder negativer, Aberration, ebenso wie man die longitudinale Aberration eines bestimmten Strahles misst. Was das Zeichen betrifft, so bemerke man, dass positive Werthe von $A' \Phi'$ etc. dem Begriffe der positiven »sphärischen Aberration» entsprechen!

Bei der Diskussion der einzelnen Formen von Strahlenbündeln empfiehlt es sich, dieselben in drei Gruppen zu theilen, je nachdem zwei, eine oder gar keine Symmetrieebene vorhanden ist.

Zu der *ersten Form*, welche durch zwei Symmetrieebenen charakterisirt ist, gehören die Strahlenbündel, für welche sämmtliche Asymmetrienwerthe gleich Null sind, und welche also als *symmetrische Strahlenbündel* bezeichnet werden können. Sie werden ausser durch die Brennstrecke E durch die Aberrationswerthe $A'\, C'\, C''\, A''$ bestimmt, von welchen jedoch wegen der allgemeinen Relation $C' - C'' = E$ nur drei unabhängig variren können. Die Evolutenschalen haben je eine Kante, die eine in der betreffenden Symmetrieebene belegene, einfach gekrümmte Linie darstellt, deren Tangente im betreffenden Fokalpunkte senkrecht auf dem Hauptstrahl steht. $A' A''$ sind die Krümmungshalbmesser der Evoluten von den Kantlinien der durch den Hauptstrahl gehenden π- bezw. $\varkappa$-Flächen. $-\frac{C''}{E^2}$ bezw. $-\frac{C'}{E^2}$ sind die Krümmungen der Kantlinien der Evoluten.

Die lateralen und longitudinalen Aberrationen eines Strahles sind

$$\xi = -\frac{p^3 A'}{6} - \frac{p q^2 C''}{2} \qquad \eta = -\frac{p^2 q\, C'}{2} - \frac{q^3 A''}{6}$$

$$\zeta = \zeta_{,} - \frac{p^2 A'}{6} - \frac{q^2 C''}{2} \qquad \zeta = \zeta_{,,} - \frac{p^2 C'}{2} - \frac{q^2 A''}{6}$$

Die Doppellinien der Conoide von der allgemeinen Form

$$p^2 + \varepsilon q^2 = \omega^2$$

sind einfach gekrümmt und liegen in den betreffenden Symmetrieebenen. Sie schneiden den Hauptstrahl in den Punkten

$$\zeta = \zeta_{,} - \frac{\omega^2 A'}{6} \text{ bezw. } \zeta = \zeta_{,,} - \frac{\omega^2 A''}{6\varepsilon}$$

und haben die Krümmungen

$$\frac{d^2\zeta}{d\eta^2} = \frac{\varepsilon A' - 3C''}{3E^2} \quad \text{bezw.} \quad \frac{d^2\zeta}{d\xi^2} = \frac{A'' - 3\varepsilon C'}{3\varepsilon E^2}$$

Die beiderseits von Furchen markirten dünnsten Querschnitte des durch ein solches Conoid begrenzten Strahlenbündels bilden cylindrische Flächen, welche den Hauptstrahl in den Punkten

$$\zeta = \zeta_{,} - \frac{\omega^2 A'}{8} \text{ bezw. } \zeta = \zeta_{,,} - \frac{\omega^2 A''}{8\varepsilon}$$

senkrecht schneiden und dort die Krümmungen

$$\frac{d^2\zeta}{d\eta^2} = \frac{\varepsilon A' - 4C''}{4E^2} \text{ bezw. } \frac{d^2\zeta}{d\xi^2} = \frac{A'' - 4\varepsilon C'}{4\varepsilon E^2}$$

sowie die Breiten

$$2\xi = \frac{\omega^3 A'}{12} \text{ bezw. } 2\eta = \frac{\omega^3 A''}{12\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}$$

haben.

Aus den Normalengleichungen finden wir die Gleichung eines Conoides in der Form:

$$\xi = p\left\{\zeta_{,} - \zeta - \frac{\omega^2 A'}{6} + \frac{q^2}{6}(\varepsilon A' - 3C'')\right\}$$

$$\eta = q\left\{\zeta_{,,} - \zeta - \frac{\omega^2 C'}{2} + \frac{q^2}{6}(3\varepsilon C' - A'')\right\}$$

woraus ersichtlich ist, dass die Querschnitte des Conoides nur in dem Falle Ellipsen bilden, dass $\varepsilon = \frac{3C''}{A'} = \frac{A''}{3C'}$ ist, wobei auch die Doppellinien des Conoides gerade sind. Diese Bedingung ist mit der Bedingung $\Phi'\Phi'' = 9\Omega'\Omega''$ identisch, welche wiederum besagt, dass das

Strahlenbündel unter seinen Wellenflächen eine besitzt, die eine vollständige Berührung vierter Ordnung mit dem Scheitelsegment einer Fläche zweiten Grades hat. Die Bedingung $A'A'' = 9C'C''$ bedeutet also, dass das Strahlenbündel aus einer Schaar von Conoiden mit geraden, senkrecht auf einander stehenden Doppellinien besteht. Da aber, wenn $A' = A'' = 0$ ist, zur Erfüllung der Bedingung $\varepsilon = \frac{3C''}{A'} = \frac{A''}{3C'}$ auch $C' = C'' = 0$ sein müsste, was unmöglich ist, so können sich solche Conoide bei vorhandensein von zwei reellen Brennlinien nicht vorfinden. *Es giebt also kein Strahlenbündel, dessen Begrenzungsfläche ein solches Conoid, ein* Sturm'sches, *bildet.* Nur so viel bleibt in der Wirklichkeit von dem geläufigen Typus des Sturm'schen Conoides, dass die Normalen einer Fläche zweiten Grades, u. zw. eines Ellipsoides oder eines elliptischen Paraboloides bezw. Hyperboloides eine Schaar von Conoiden mit zwei geraden, auf einander senkrechten Doppellinien bilden. Wenn man nämlich in einer solchen Fläche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2cz - kz^2}{c^2}$$

welche ein Ellipsoid, ein elliptisches Paraboloid bezw. ein elliptisches Hyperboloid darstellt, je nachdem $k = +1$ $k = 0$ bezw. $k = -1$ ist, ein Conoid durch die Gleichung $z = C$ bestimmt, so repräsentiren die Gleichungen der Normale

$$\xi - x + \frac{xc^2}{a^2(c - kC)}(\zeta - C) = 0$$

$$\eta - y + \frac{yc^2}{b^2(c - kC)}(\zeta - C) = 0$$

zusammen mit der Ellipsengleichung zwischen x und y eine Ellipsengleichung zwischen ξ und η, welche C und ζ als Parameter enthält; und das durch die Linie $z = C$ abgegrenzte Strahlenbündel wird zwar von dem entsprechenden Sturm'schen Conoide abgegrenzt, die Theile in der Nähe der Fokalpunkte ausgenommen, welche die bezüglichen Evoluten abgrenzen, aber die dem Sturm'schen Typus angehörenden Brennlinien existiren nicht.

Da für eine Fläche zweiten Grades im Scheitelpunkt

$$\frac{\Phi'}{D_{\prime}} = \frac{3\Omega''}{D_{\prime\prime}}$$

ist, so finden wir zur Bestimmung derjenigen Wellenfläche eines durch die Bedingung $A'A'' = 9C'C''$ charakterisirten Strahlenbündels, welche eine vollständige Berührung vierter Ordnung mit dem Scheitelsegment einer Fläche zweiten Grades hat,

$$\frac{D_{,}}{D_{,,}} = \frac{3C''}{A'}$$

und die Schnittlinien der Conoide mit der Fläche bilden Ellipsen mit der Excentricität der DUPIN'schen Indicatrice.

In einem Strahlenbündel, für welches diese Bedingung nicht erfüllt ist, existiren, falls A' und $3C''$ bezw. A'' und $3C'$ dasselbe Vorzeichen haben, zwei Schaaren von Conoiden, deren eine Doppellinie gerade ist, während die zweite die Krümmung

$$\frac{d^2\zeta}{d\eta^2} = \frac{A'A'' - 9C'C''}{9C'E^2} \text{ bezw. } \frac{d^2\zeta}{d\xi^2} = \frac{A'A'' - 9C'C''}{9C''E^2}$$

hat.

Die Aufgabe, eine Schaar von Conoiden zu finden, deren Doppellinien gleich grosse Krümmung mit entgegengesetzten Vorzeichen haben, führt zu der Gleichung

$$\varepsilon A' + \frac{A''}{\varepsilon} - 3(C' + C'') = 0$$

welche, wenn $\varepsilon = \frac{D_{,}}{D_{,,}}$ gesetzt wird, die Form

$$\frac{\Phi'}{D_{,}^2} + \frac{\Phi''}{D_{,,}^2} = \frac{3(\Omega' + \Omega'')}{D_{,}D_{,,}}$$

annimmt. Falls die quadratische Gleichung einen reellen positiven Werth für ε giebt, existirt also eine Wellenfläche des Strahlenbündels, welche eine vollständige Berührung vierter Ordnung hat mit dem Scheitelpunkte einer Fläche, deren Querschnitte Ellipsen darstellen, und die Normalen bilden eine Schaar von Conoiden mit Doppellinien von gleich grosser Krümmung mit verschiedenem Vorzeichen.

Ist in einem Strahlenbündel A' bezw. A'' überall gleich Null, so sind die Wellenflächen, wie schon aus den Erörterungen des vorigen Capitels hervorgeht, Canalflächen. Wenn man hierbei ε verschiedene Werthe giebt, so erhält man eine beliebige Krümmung der einen Doppellinie der Conoide, während die andere mit der Brennlinie des Strahlenbündels zusammenfällt.

Dass, wenn gleichseitig A' und A'' im ganzen Strahlenbündel gleich Null sind, auch C' oder C'' verschwindet, so dass, wenn zwei reelle Brennlinien existiren, die eine immer gerade ist, die andere die Krümmung $\pm\frac{1}{E}$ haben muss, ist schon erwähnt.

Die Strahlenbündel dieser Form entstehen u. A. durch Brechung von homocentrischem Lichte in centrirten sphärocylindrischen bezw. torischen Brillengläsern.

Die Strahlenbündel *der zweiten Form* mit einer Symmetrieebene oder *Strahlenbündel mit einfacher Asymmetrie* entstehen am häufigsten durch Brechung unter schiefer Incidenz in sphärischen, cylindrischen oder combinirten Gläsern, wenn die Brechungsebene einen Hauptnormalschnitt sämmtlicher brechenden Flächen darstellt. Bedingung ist $B' = B'' = 0$ sowie entweder $R' = E \operatorname{tg} \vartheta_{,,} = 0$ längs der ganzen durch den Hauptstrahl gehenden $\varkappa$-Kläche oder $R'' = E \operatorname{tg} \vartheta_{,} = 0$ längs der ganzen bezüglichen π-Fläche. Wenn wir die letzte Alternative ins Auge fassen und für die Eigenschaften der Evolute auf das vorige Capitel hinweisen, so haben wir nur hinzuzufügen, dass der erste dünnste Querschnitt bis auf unendlich kleine Grössen höherer Ordnung als der dritten durch einen Cylinder erhalten wird, dessen Achse parallel zur X-Achse steht, und welcher die erste Conoiddoppellinie enthält, die zugleich die Furche des Strahlenbündels bildet. Dieser Querschnitt schneidet, wenn die Begrenzungsfläche ein Conoid $\pi^2 + \varkappa^2 = \omega^2$ bildet, den Hauptstrahl rechtwinkelig im Punkte

$$\zeta = \zeta_{,} - \frac{\omega^2 A'}{6}$$

hat die Dicke

$$\frac{\omega^2 R'}{2}$$

und die Krümmung

$$\frac{A' - 3\,C''}{3\,E^2}$$

während die Projektion der Furche auf die XY-Ebene die Krümmung

$$\frac{R' + E \operatorname{tg} \vartheta_{,,}}{E^2}$$

hat. Der zweite dünnste Querschnitt, durch zwei Furchen repräsentirt, entsteht durch Abschneiden des Strahlenbündels mittels eines auf

der XZ-Ebene senkrecht stehenden Cylinders, dessen Tangentialebene im Schnittpunkte mit dem Hauptstrahl mit der XY-Ebene den Winkel $\vartheta_{,,}$ bildet. Dieser Schnittpunkt ist

$$\zeta = \zeta_{,,} - \frac{\omega^2 A''}{8}$$

die Dicke des Querschnittes

$$\frac{\omega^3 A''}{12}$$

und die Krümmung

$$\frac{\cos^3 \vartheta_{,,} (A'' - 4\,C')}{4\,E^2}$$

Wenn im ganzen Strahlenbüudel $A'' = C' = 0$ ist, so existirt eine gerade Brennlinie, und die Wellenflächen sind Umdrehungsflächen. Solche Strahlenbündel entstehen bei excentrischer Blende durch Brechung in centrirten, aus Umdrehungsflächen bestehenden optischen Systemen, wenn der leuchtende Punkt sich auf der optischen Achse befindet.

Die Strahlenbündel *der dritten Form*, welche keine Symmetrieebene besitzen, und die wir als *Strahlenbündel mit doppelter Asymmetrie* bezeichnen, entstehen im Auge bei Verwenden von sphärisch-cylindrischen Gläsern, sobald die Blicklinie nicht in einem Hauptnormalschnitt der brechenden Fläche liegt. Sie sind oben ausführlich als allgemeine Form der Strahlenbündel beschrieben. Hier wollen wir nur betreffs der dünnsten Querschnitte eines von einem Conoide $\pi^2 + \varkappa^2 = \omega^2$ begrenzten Strahlenbündels folgendes recapituliren. Die Tangentialebenen der die dünnsten Querschnitte bildenden Cylinderflächen schneiden den Hauptstrahl in den Punkten

$$\zeta = \zeta_{,} - \frac{\omega^2 A'}{6} \text{ bezw. } \zeta = \zeta_{,,} - \frac{\omega^2 A''}{6}$$

Die Dicken sind

$$\frac{\omega^2 R'}{2} \text{ bezw. } \frac{\omega^2 R''}{2}$$

die Krümmungen

$$\frac{\cos^3 \vartheta_{,} (A' - 3\,C'')}{3\,E^2} \text{ bezw. } \frac{\cos^3 \vartheta_{,,} (A'' - 3\,C')}{3\,E^2}$$

Endlich finden wir für die Tangenten der Furchen in ihren Schnittpunkten mit der XZ- bezw. YZ-Ebene, dass ihre Projektionen auf die XY-Ebene mit der Y- bezw. X-Achse die Winkel

$$-\operatorname{arc\,tg}\frac{\omega^2 B'}{2E} \text{ bezw. } \operatorname{arc\,tg}\frac{\omega^2 B''}{2E}$$

bilden. Der Specialfall, dass sämmtliche Asymmetrienwerthe ausser den Diagonalasymmetrien gleich Null sind, dürfte wohl in optischen Systemen ebenso selten vorkommen, wie z. B. eine Parabel als Cometenbahn, muss aber hier berücksichtigt werden, da solche Strahlenbündel durch Brechung in bicylindrischen Gläsern entstehen, sobald die Achsen der Cylinderflächen nicht senkrecht auf einander stehen, und da schon seit mehreren Jahren vorgeschlagen worden ist, gewisse Fälle von Astigmatismus durch solche schief-bicylindrische Combinationen zu corrigiren. Da sich diese Strahlenbündel von den symmetrischen nur durch die Werthe B' und B'' unterscheiden, so gilt betreffs der Aberrationswerthe das über diese gesagte. Es ist nur zu bemerken, dass die Evolutenkanten zwar in den Fokalpunkten durch die betreffenden Coordinatenebenen hindurchtreten, indem ihre osculirenden Ebenen mit diesen zusammenfallen, aber nicht ohne Torsion sind. Die beiden Furchen, welche einen dünnsten Querschnitt bilden, liegen nicht in einer und derselben cylindrischen Fläche, da ihre Neigungen gegen die XY-Ebene $\frac{d\zeta}{d\eta} = \mp \frac{\omega B'}{4E}$ bezw. $\frac{d\zeta}{d\xi} = \pm \frac{\omega B''}{4E}$ sind, und der dünnste Querschnitt folglich eine windschiefe Fläche darstellt. Ausserdem sind die Neigungen der Furchen gegen die YZ- bezw XZ-Ebene

$$\frac{d\xi}{d\eta} = -\frac{\omega^2 B'}{4E} \text{ bezw. } \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\omega^2 B''}{4E}$$

Ausdrücke, welche die Benennung diagonale Asymmetrie gewissermassen zu rechtfertigen scheinen.

---

3. Die Kreispunkte der Flächen.

Die Kreispunkte, allgemein durch die Beziehung $D_{,} - D_{,,} = 0$ und im Coordinatensystem $p = q = s = 0$ durch die Gleichung $r = t$ charakterisirt, gehören mit in das dunkelste Gebiet der Flächentheorie. In den gewöhnlichen Handbüchern z. B. KNOBLAUCH[1], BIANCHI[2] wird ihnen sorgfältig aus dem Wege gegangen, und die neueren Arbeiten über die durch eine Differentialgleichung bestimmten Curven wenden sich anderen Curvensystemen als den Krümmungslinien zu[3]. Nur bei DARBOUX[4] findet man für den Fall, wo sämmtliche Differentialquotienten dritter Ordnung der Flächengleichung von Null verschieden sind, die Aufgabe gelöst, die Zahl und Richtung der wirklich in sie eintretenden Krümmungslinien zu finden. Andererseits findet sich bei PICARD[5] eine Angabe, nach welcher die Flächennormale im Kreispunkt einer Schaar von abwickelbaren Flächen angehören sollte, die nach jeder Richtung die Fläche senkrecht schnitten, nach welcher mithin Krümmungslinien auf der Fläche von allen Seiten hin in den Kreispunkt eintreten müssten.

Die Ursache, dass diese Ansicht, ungeachtet der citirten Ausführung von DARBOUX, wohl noch als allgemein herrschend angesehen werden muss, mag einestheils darin liegen, dass man die Krümmungslinien als die Linien, deren Tangenten mit den Haupttangenten der Fläche zusammenfallen, definirt und, da diese im Kreispunkt unbestimmt sind, daraus gefolgert hat, dass Krümmungslinien von allen Richtungen her in den Kreispunkt eintreten müssten. Andererseits mag man auch, an der Eigenschaft der Krümmungslinien, von geodätischer Torsion

[1] JOHANNES KNOBLAUCH, Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen, Leipzig 1888.

[2] LUIGI BIANCHI, Lezioni di Geometria differenziale, Pisa 1894.

[3] Vergl. z. B. die soeben erschienene Abhandlung von I. BENDIXSON, Sur les courbes définies par des équations différentielles, Acta Math. T. 24.

[4] Théorie des Surfaces, T. II S. 357—359.

[5] Traité d'analyse, T. III S. 225.

frei zu sein, festhaltend, aus dem Umstande, dass alle durch einen Kreispunkt hindurchtretenden Linien in diesem ohne geodätische Torsion sind — wie es aus dem S. 15 gegebenen Ausdruck für die Torsion einer geodätischen Linie hervorgeht — den Schluss gezogen haben, dass alle durch einen Kreispunkt gehenden Linien auf einer Fläche in diesem mit Krümmungslinien zusammenfallen, ohne zu untersuchen, ob diese Abwesenheit von geodätischer Torsion eine constante Eigenschaft einer in beliebiger Richtung durch den Kreispunkt gehenden Linie ist, oder ob sie nur einen Uebergang von negativer zu positiver Torsion oder vice versa bedeutet.

Um diese Fehlerquellen zu umgehen müssen wir die Krümmungslinien entweder als *Linien, welche überall frei von geodätischer Torsion sind,* oder als *Linien, längs welchen die Flächennormalen abwickelbare Flächen darstellen,* definiren. Beide Definitionen führen identisch zum gleichen Ziel. Erstere besagt, dass in einem gegebenen Punkte sowohl der Ausdruck für die geodätische Torsion der Linie wie dessen Ableitungen gleich Null sein müssen, letztere, dass der kleinste Abstand zwischen den Flächennormalen in zwei einander unendlich nahe liegenden Punkten ein unendlich kleines dritter Ordnung oder, falls die Evolute im Bezüglichen Punkte eine Spitze hat, ein unendlich kleines der vierten Ordnung sein muss.

Wenn wir in den allgemeinen Ausdruck für die Torsion einer doppelt gekrümmten Linie — x als unabhängige Variabele betrachtet —

$$\frac{dx(d^3z\,d^2y - d^2z\,d^3y)}{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (d^2y)^2dx^2 + (d^2z)^2dx^2}$$

den aus der allgemeinen Gleichung einer geodätischen Linie

$$p(dy\,d^2z - dz\,d^2y) - q\,dx\,d^2z - dx\,d^2y = 0$$

ermittelten Werth für d^2y sowie den durch Differentiation dieser Gleichung gefundenen Werth für d^3y einsetzen, so ergiebt sich als allgemeiner Ausdruck für die geodätische Torsion einer Linie auf einer Fläche:

$$T = \frac{b}{a}$$

$$b = dq(dx + p\,dz) - dp(dy + q\,dz)$$

$$a = (1 + p^2 + q^2)\left((1 + p^2)dx^2 + 2pq\,dx\,dy + (1 + q^2)dy^2\right) .$$

Die Identität $aT = b$ ergiebt auf den ersten Blick, da a niemals gleich Null werden kann, dass die Bedingung $T = dT = d^2T = \ldots = 0$ mit der Bedingung $b = db = d^2b = \ldots\ldots = 0$ identisch ist. Nun ist zwar die mit der bekannten Differentialgleichung der Hauptkrümmungslinien identische Bedingung $b = 0$ im Kreispunkte für jeden beliebigen Werth von $\frac{dy}{dx}$ erfüllt, aber schon die erste Ableitung ergiebt für $p = q = s = 0$

$$d^2q\,dx + dq\,d^2x - d^2p\,dy - dp\,d^2y = 0$$

oder für $r - t = 0$, wenn x unabbängige Variabele ist, wobei das in d^2q enthaltene Glied td^2y nicht zu vergessen ist:

$$v\,dx^3 - (u - 2w)\,dx^2dy + (u - 2v)\,dx\,dy^2 - w\,dy^3 = 0 \;.$$

Die Wurzeln dieser cubischen Gleichung, von denen wenigstens eine reell sein muss, geben also die Tangenten der in den Kreispunkt eintretenden Krümmungslinien an. Da sie, für $dy = 0$, auch $v = 0$ giebt, so ist sie identisch mit der Gleichung für die Transformation des Coordinatensystems, welche v verschwinden lässt.

Die zweite Ableitung ergiebt auf dieselbe Weise,

$$d^3q\,dx + 2\,d^2q\,d^2x + dq\,d^3x - d^3p\,dy - 2\,d^2p\,d^2y - dp\,d^3y = 0$$

oder für $r - t = 0$, x als unabhängige Variabele betrachtet:

$$\partial^{31}dx^4 - (\partial^{40} - 3\,\partial^{22})\,dx^3dy + 3\,(\partial^{13} - \partial^{31})\,dx^2dy^2 + (\partial^{04} - 3\,\partial^{22})\,dx\,dy^3 -$$
$$- \partial^{13}dy^4 - d^2y\,\{(2u - 3w)\,dx^2 + (7v - 3u)\,dx\,dy + 5w\,dy^2\} = 0$$

wodurch wir für den allgemeinen Fall, wo nicht sämmtliche Differentialquotienten dritter Ordnung in der Flächengleichung verschwinden, die geodätische Krümmung der Krümmungslinien erhalten, im entgegengesetzten Falle aber eine Gleichung vierten Grades für die Orientirung der in den Kreispunkt eintretenden Krümmungslinien bekommen, eine Gleichung, die mit derjenigen für Transformation des Coordinatensystemes in der Weise, dass $\partial^{31} = 0$ wird, identisch ist, und welche als solche, wie sogleich gezeigt werden soll, immer wenigstens zwei verschiedene reelle Wurzeln hat. Um die geodätische Krümmung für diesen Fall zu finden, müssen wir noch eine Ableitung machen, wobei sich für $\partial^{31} = 0$ nach Einsetzen von $dy = 0$ aus der Gleichung

$$d^4q\,dx + 3\,d^2z\,dp\,d^2q - 3\,d^3p\,d^2y - dp\,d^4y = 0$$

in welcher

$$d^4 q = \frac{\partial^5 z}{\partial x^4 \partial y} dx^4 + 6\partial^{22} dx^2 d^2 y + t d^4 y$$

ist, folgende Gleichung ergiebt:

$$\frac{\partial^5 z}{\partial x^4 \partial y} dx^5 - 3(\partial^{40} - 2\partial^{22} - r^2 t) dx^3 d^2 y = 0 \; .$$

Da der Fall $r^2 t = 0$ ausgeschlossen ist, so erhellt hieraus weiter, dass, wenn sämmtliche Differentialquotienten auch der vierten Ordnung in der Flächengleichung verschwinden, längs jeder Tangente des Kreispunktes eine Hauptkrümmungslinie ohne unendlich grosse geodätische Krümmung in den Kreispunkt eintritt.

Wir formuliren die Resultate auf folgende Weise, indem wir die Tangenten der in einen Kreispunkt eintretenden Krümmungslinien als *Haupttangenten des Kreispunkts* bezeichnen:

In dem Kreispunkte sind diejenigen Flächentangenten, welche in den Coordinatensystemen $p = q = v = 0$ mit der X-Achse zusammenfallen, Haupttangenten, und die geodätische Krümmung einer Krümmungslinie wird durch den Werth des Ausdruckes $\frac{\partial^{31}}{3u - 3w}$ im bezüglichen Coordinatensystem $p = q = v = 0$ angegeben. Wenn sämmtliche Differentialquotienten dritter Ordnung in der Flächengleichung gleich Null sind, so sind diejenigen Flächentangenten, welche in den Coordinatensystemen $p = q = \partial^{31} = 0$ mit der X-Achse zusammenfallen, Haupttangenten, und die geodätische Krümmung einer Krümmungslinie wird durch den Werth des Ausdruckes $\frac{\frac{\partial^5 z}{\partial x^4 \partial y}}{3(\partial^{40} - 2\partial^{22} - r^2 t)}$ im jeweiligen Coordinatensystem $p = q = \partial^{31} = 0$ angegeben. Wenn sämmtliche Differentialquotienten nicht nur dritter, sondern auch vierter Ordnung in der Flächengleichung verschwinden, so treten Krümmungslinien von allen Richtungen her ohne unendlich grosse geodätische Krümmung in den Kreispunkt ein [1].

Wenn wir in der Flächengleichung z nach Potenzen von x und y entwickeln, dann

---

[1] Die Fälle, in welchen der Ausdruck für die geodätische Krümmung einer Hauptkrümmungslinie die Form ∞ oder $\frac{0}{0}$ annimt, werden wir später besonders berücksichtigen.

$$x = \xi \cos\vartheta - \eta \sin\vartheta$$

$$y = \xi \sin\vartheta + \eta \cos\vartheta$$

setzen, was einer Drehung des Coordinatensystemes um einen Winkel ϑ von der Richtung positiver x nach der Richtung positiver y um die Z-Achse herum entspricht, so erhalten wir:

$$\frac{\partial^3 \zeta}{\partial \xi^3} = u \cos^3\vartheta + 3v \cos^2\vartheta \sin\vartheta + 3w \cos\vartheta \sin^2\vartheta + u \sin^3\vartheta$$

$$\frac{\partial^3 \zeta}{\partial \xi^2 \partial \eta} = v \cos^3\vartheta - (u - 2w) \cos^2\vartheta \sin\vartheta + (u - 2v) \cos\vartheta \sin^2\vartheta - w \sin^3\vartheta$$

$$\frac{\partial^3 \zeta}{\partial \xi \partial \eta^2} = w \cos^3\vartheta + (u - 2v) \cos^2\vartheta \sin\vartheta + (u - 2w) \cos\vartheta \sin^2\vartheta + v \sin^3\vartheta$$

$$\frac{\partial^3 \zeta}{\partial \eta^3} = u \cos^3\vartheta - 3w \cos^2\vartheta \sin\vartheta + 3v \cos\vartheta \sin^2\vartheta - u \sin^3\vartheta$$

$$\frac{\partial^4 \zeta}{\partial \xi^4} = \partial^{40} \cos^4\vartheta + 4\partial^{31} \cos^3\vartheta \sin\vartheta + 6\partial^{22} \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta + \\ + 4\partial^{13} \cos\vartheta \sin^3\vartheta + \partial^{04} \sin^4\vartheta$$

$$\frac{\partial^4 \zeta}{\partial \xi^3 \partial \eta} = \partial^{31} \cos^4\vartheta - (\partial^{40} - 3\partial^{22}) \cos^3\vartheta \sin\vartheta + 3(\partial^{13} - \partial^{31}) \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta + \\ + (\partial^{04} - 3\partial^{22}) \cos\vartheta \sin^3\vartheta - \partial^{13} \sin^4\vartheta$$

$$\frac{\partial^4 \zeta}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} = \partial^{22} \cos^4\vartheta + 2(\partial^{13} - \partial^{31}) \cos^3\vartheta \sin\vartheta + (\partial^{40} - 4\partial^{22} + \partial^{04}) \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta + \\ + 2(\partial^{31} - \partial^{13}) \cos\vartheta \sin^3\vartheta + \partial^{22} \sin^4\vartheta$$

$$\frac{\partial^4 \zeta}{\partial \xi \partial \eta^3} = \partial^{13} \cos^4\vartheta + (\partial^{04} - 3\partial^{22}) \cos^3\vartheta \sin\vartheta + 3(\partial^{31} - \partial^{13}) \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta - \\ - (\partial^{40} - 3\partial^{22}) \cos\vartheta \sin^3\vartheta - \partial^{31} \sin^4\vartheta$$

$$\frac{\partial^4 \zeta}{\partial \eta^4} = \partial^{04} \cos^4\vartheta - 4\partial^{13} \cos^3\vartheta \sin\vartheta + 6\partial^{22} \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta - \\ - 4\partial^{31} \cos\vartheta \sin^3\vartheta + \partial^{40} \sin^4\vartheta \;.$$

Da aus diesen, weiter unten ausgiebiger zu verwendenden Ausdrücken unmittelbar die Identitäten

$$\frac{d}{d\vartheta} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial \xi^3} = 3 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial \xi^2 \partial \eta} \qquad \frac{d}{d\vartheta} \frac{\partial^4 \zeta}{\partial \xi^4} = 4 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial \xi^3 \partial \eta}$$

hervorgehen, so können wir, indem wir mit ϱ und *ds Krümmungshalbmesser und Bogenelement eines Normalenschnittes* bezeichnen, und die Identitäten

$$\frac{\partial^3 \zeta}{\partial \xi^3} = \frac{d}{ds}\frac{1}{\varrho} \qquad \frac{\partial^4 \zeta}{\partial \xi^4} = \frac{d^2}{ds^2}\frac{1}{\varrho} + \frac{3}{\varrho^3}$$

beachten, folgenden Satz aussprechen:

Während im allgemeinen Flächenpunkte die Orientirung der Haupttangenten durch die Bedingung $\frac{d\varrho}{d\vartheta} = 0$ *bestimmt wird, so gilt im Kreispunkte, wo für alle Werthe von* ϑ $\frac{d\varrho}{d\vartheta} = 0$ *ist, die Bedingung* $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d\varrho}{ds} = 0$ *oder, wenn für alle Werthe von* ϑ $\frac{d\varrho}{ds} = 0$ *ist, die Bedingung* $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^2\varrho}{ds^2} = 0$. *Wenn dabei* $\frac{d^2\varrho}{ds^2}$ *für alle Werthe von* ϑ *einen constanten endlichen Werth hat, so sind alle Tangenten des Kreispunktes Haupttangenten, während, wenn für alle Werthe von* ϑ $\frac{d\varrho}{ds} = 0$ *und* $\frac{d^2\varrho}{ds^2} = 0$ *ist — wobei eine vollständige Berührung vierter Ordnung mit einer Sphäre besteht, die Orientirung der Haupttangenten von einer Gleichung fünften oder höheren Grades angegeben wird.*

Es hat nämlich, bei $\frac{d\varrho}{ds} = 0$, $\frac{d^2\varrho}{ds^2}$ für alle Werthe von ϑ einen endlichen constanten Werth, nur wenn $\partial^{31} = \partial^{13} = 0$ und $\partial^{40} = \partial^{04} = 3\partial^{22}$, dabei aber $\partial^{40} \gtrless 3r^3$ ist, wobei der eben angeführte Beweis für den Fall, dass sämmtliche Differentialquotienten vierter Ordnung in der Flächengleichung verschwinden, unverändert gültig ist. Ist aber dabei $\partial^{40} = 3r^3$, so ergiebt die Gleichung

$$d^4q\,dx + 3\,d^2z\,dp\,d^2q - 3\,d^3p\,d^2y - dp\,d^4y = 0$$

dass die Haupttangenten mit der X-Achse in denjenigen Coordinatensystemen zusammenfallen, in welchen $\frac{\partial^5 z}{\partial x^4 \partial y} = 0$ ist.

Daraus, dass $\frac{\partial^4 \zeta}{\partial \xi^4}$ bei $\vartheta = \pi$ den ursprünglichen Werth wieder bekommt, erhellt es unmittelbar, dass wenigstens ein Maximum und ein Minimum von $\frac{\partial^4 \zeta}{\partial \xi^4}$ als Funktion von ϑ existiren muss — den eben

besprochenen Fall $\partial^{31} = \partial^{13} = 0$ bei $\partial^{40} = \partial^{04} = 3\partial^{22}$ ausgenommen — d. h. dass die Gleichung vierten Grades $\frac{\partial^4 \zeta}{\partial \xi^3 \partial \eta} = 0$ immer wenigstens zwei reelle Wurzeln besitzt.

Wenn wir die Krümmungslinien einer Fläche als ihre Schnittlinien mit den abwickelbaren Normalflächen betrachten, so ist die Bedingung dafür, dass eine Hauptangente im Coordinatensystem $p = q = s = 0$ mit der X-Achse zusammenfalle, die, dass in den Normalengleichungen

$$\xi = x - p(\zeta - z) \qquad \eta = y - q(\zeta - z)$$

für irgend einen bestimmten Werth von ζ bei $dy = 0$ gleichzeitig $d\xi = 0$ und $d\eta = d^2\eta = 0$ bezw., wenn $u = 0$ ist, ausserdem $d^3\eta = 0$ gefunden wird. Wir haben allgemein:

$$d\zeta = dx(1 - \zeta r) \qquad d\eta = 0$$

$$d^2\eta = d^2 y(1 - \zeta t) - \zeta v dx^2$$

$$d^3\eta = d^3 y(1 - \zeta t) - \zeta(\partial^{31} dx^3 + 3w\,dx\,d^2 y)$$

Für die die X-Achse berührende Hauptkrümmungslinie ist

$$d^2 y = \left\{\frac{\partial^{31}}{r - t} - \frac{v(2u - 3w)}{(r - t)^2}\right\} dx^3 = \frac{\partial^{31}}{r - t} dx^3 - \frac{2u - 3w}{r - t} dx\,d^2 y$$

und folglich bei $\zeta = \frac{1}{r} = $ Const.

$$d^3\eta = -\frac{2u}{r} dx\,d^2 y = -\frac{2R'}{\varrho_{\prime}^2 R_{\prime}} dx^3$$

welche Beziehung, da sie in keiner Weise von der Grösse der Differenz $r - t$ abhängt, für eine abwickelbare Normalfläche allgemeingiltig sein muss und folglich auch in einem Kreispunkte für jede abwickelbare Normalfläche gilt, welche die Kreispunktsnormale enthält.

Für einen Kreispunkt ergiebt sich, da $\zeta = \frac{1}{r} = \frac{1}{t}$ ist, aus dem Werthe von $d^2\eta$, dass in den Coordinatensystem $p = q = v = 0$ eine Haupttangente mit der X-Achse zusammenfällt, und aus dem Werthe von $d^3\eta$, dass, wenn sämmtliche Differentialquotienten dritter Ordnung in der Flächengleichung verschwinden, und mithin die Orientirung der Haupttangenten durch die Gleichung $d^3\eta = 0$ nicht gegeben wird, in

den Coordinatensystemen $p = q = \partial^{31} = 0$ die X-Achse eine Haupttangente darstellt. Ist aber die Orientirung der Haupttangenten durch die Gleichung $d^2\eta = 0$ bestimmt, so geben die zwei Werthe von $d^3\eta$, zusammengestellt, die geodätische Krümmung der Hauptkrümmungslinie übereinstimmend mit dem schon gefundenen Werthe.

Eine abwickelbare Normalfläche besitzt zwei Berührungslinien mit der Krümmungsmittelpunktsfläche, wovon die eine, die Kantlinie jener, eine geodätische Linie dieser darstellt, während sich die beiden Flächen längs der anderen einfach berühren. Im allgemeinen Falle sind diese Linien völlig getrennt und gehören ganz je einer Schale der Krümmungsmittelpunktsfläche an. Wenn aber eine abwickelbare Normalfläche durch einen Kreispunkt hindurchgeht, wobei sich die beiden Berührungslinien mit der Krümmungsmittelpunktsfläche im betreffenden Krümmungsmittelpunkt treffen müssen, so ist es nicht von vornherein bestimmt, ob die Kantlinie nach beiden Seiten von diesem Krümmungsmittelpunkte einer und derselben Evolutenschale angehört. Wenn wir demnach, da im Kreispunkte das im allgemeinen Falle gebrauchte Coordinatensystem $s_{,}s_{,,}$ unanwendbar ist, die Kantlinie der abwickelbaren Normalfläche als ihre s-Linie und ihre zweite Berührungslinie mit der Evolute als ihre t-Linie bezeichnen, so haben wir damit nichts über die Beziehungen der beiden Evolutenschalen zu einander ausgesprochen. Die Kreispunktsnormale ausgenommen, geht jede Normale der abwickelbaren Fläche durch zwei Krümmungsmittelpunkte, entsprechend den zwei Hauptkrümmungen der Fläche im betreffenden Punkte. Locus dieser Krümmungsmittelpunkte ist die s-Linie bezw. t-Linie der abwickelbaren Normalfläche, und die entsprechenden Krümmungen bezeichnen wir mit D_s bezw. D_t.

In einwandsfreier Weise finden wir die geometrischen Eigenschaften der erwähnten Linien durch Untersuchung der Bedingungen, unter welchen sich zwei Normalen im Kreispunktsflächenelement schneiden.

Durch Elimination von ζ aus den beiden S. 41 angeführten Bedingungsgleichungen dafür, dass sich die Normalen in den Punkten $x_{,}y_{,}$ und $x_{,,}y_{,,}$ schneiden, ergiebt sich:

$$(q_{,} - q_{,,})(x_{,} - x_{,,} + p_{,}z_{,} - p_{,,}z_{,,}) = (p_{,} - p_{,,})(y_{,} - y_{,,} + q_{,}z_{,} - q_{,,}z_{,,})$$

und nach dreimaliger Differentiation für $p = q = x = y = 0$

$$(d^2 q_{,} - d^2 q_{,,})(dx_{,} - dx_{,,}) + (dq_{,} - dq_{,,})(d^2 x_{,} - d^2 x_{,,}) =$$
$$= (d^2 p_{,} - d^2 p_{,,})(dy_{,} - dy_{,,}) + (dp_{,} - dp_{,,})(d^2 y_{,} - d^2 y_{,,})$$

d. h. für $r = t$

$$(dx_{,} - dx_{,,})\{v(dx_{,}^2 - dx_{,,}^2) + 2w(dx_{,}dy_{,} - dx_{,,}dy_{,,}) + u(dy_{,}^2 - dy_{,,}^2)\} =$$
$$= (dy_{,} - dy_{,,})\{u(dx_{,}^2 - dx_{,,}^2) + 2v(dx_{,}dy_{,} - dx_{,,}dy_{,,}) + w(dy_{,}^2 - dy_{,,}^2)\} .$$

Unter Berücksichtigung der Identität

$$2(dx_{,}dy_{,} - dx_{,,}dy_{,,}) = (dy_{,} + dy_{,,})(dx_{,} - dx_{,,}) + (dy_{,} - dy_{,,})(dx_{,} + dx_{,,})$$

kann diese Gleichung durch Einsetzen von

$$\frac{dy_{,} - dy_{,,}}{dx_{,} - dx_{,,}} = a \qquad\qquad \frac{dy_{,} + dy_{,,}}{dx_{,} + dx_{,,}} = b$$

leicht in die Form

$$v + w(a + b) + uab = ua + va(a + b) + wa^2 b$$

gebracht werden und giebt, sowohl unter der Bedingung $a = b = \mathrm{tg}\,\vartheta$ wie unter der Bedingung $-\frac{1}{a} = b = \mathrm{tg}\,\vartheta$, die Gleichung für die Orientirung der Haupttangenten:

$$w\,\mathrm{tg}^3\vartheta - (u - 2v)\,\mathrm{tg}^2\vartheta + (u - 2w)\,\mathrm{tg}\,\vartheta - v = 0 \;.$$

Von diesen beiden Bedingungen entspricht, bei Zusammenfallen der Punkte $x_{,}y_{,}$ und $x_{,,}y_{,,}$, erstere den s-Linien, letztere den t-Linien der die Kreispunktsnormale enthaltenden abwickelbaren Normalflächen.

Hierdurch ist der stricte Beweis geliefert worden, dass im allgemeinen Falle nicht nur die s-Linie, sondern auch die t-Linie durch den Krümmungsmittelpunkt des Kreispunktes geht. Für den Fall, dass die Differentialquotienten dritter Ordnung in der Flächengleichung gleich Null sind, folgt letzteres von selbst, da im Kreispunkte bei $\zeta = \frac{1}{r} = \frac{1}{t}$ aus den Normalengleichungen $d^2\xi = d^2\eta = 0$ erhalten wird, der kürzeste Abstand zwischen den Normalen in zwei Punkten auf unendlich kleine Entfernung also allgemein ein Unendlichkleines dritter Ordnung darstellt.

Für $\mathrm{tg}\,\vartheta = 0$, d. h. für ein Coordinatensystem $p = q = v = 0$ bezw. $p = q = \partial^{31} = 0$, finden wir die s-Linie der von der XZ-Ebene berührten

abwickelbaren Normalfläche durch Einsetzen von $dy_{,}=dy_{,,}=0$ und die t-Linie durch Einsetzen von $dy_{,}+dy_{,,}=dx_{,}-dx_{,,}=0$ in die bezüglichen Normalengleichungen.

Um mit der s-Linie anzufangen, haben wir die Gleichung

$$\zeta(p_{,}-p_{,,})=x_{,}-x_{,,}+p_{,}z_{,}-p_{,,}z_{,,}$$

dreimal zu differentiiren, dann $dy_{,}=dy_{,,}=0$ zu setzen, wodurch sich

$$d\zeta=-\frac{u}{2r^2}(dx_{,}+dx_{,,})$$

$$d^2\zeta=-\frac{\partial^{40}-3r^3}{3r^2}(dx_{,}^2+dx_{,}dx_{,,}+dx^2_{,,})+\frac{u^2}{2r^3}(dx_{,}+dx_{,,})^2$$

ergiebt, welche Ausdrücke, nachdem $dx_{,}=dx_{,,}=dx$ gesetzt worden ist, in die aus den beiden Normalengleichungen

$$\xi=x-p(\zeta-z) \qquad\qquad \eta=y-q(\zeta-z)$$

abgeleiteten Werthe für ξ und η eingeführt werden. Die auf diese Weise gefundenen Werthe

$$d^2\xi=\frac{u}{r}dx^2$$

$$d^3\xi=2\left(\frac{\partial^{40}}{r}-3r^2-\frac{3u^2}{2r^3}\right)dx^3$$

und die oben angegebenen für $d\zeta$ und $d^2\zeta$ sind identisch mit den für das allgemeine Flächenelement geltenden. Sie können auch aus der Gleichung $\varrho_{,}\gamma=\zeta$ wie bei der Herleitung der Eigenschaften der allgemeinen Evolute deducirt werden und geben durch Zusammenstellung der beiden Werthe:

$$\frac{dD_{,}}{ds}=u \qquad\qquad \frac{d^2D_{,}}{ds^2}=\partial^{40}-3r^3$$

Andererseits finden wir, da

$$dq=0 \qquad d^2q=td^2y \qquad d^3q=\partial^{31}dx^3+3w\,dx\,d^2y+td^3y$$

sind:

$$d^3\eta=d^3y-\zeta d^3q-3d\zeta d^2q=-\frac{\partial^{31}}{r}dx^3+\frac{3(u-w)}{r}dx\,d^2y$$

welcher Ausdruck wieder unter Benutzung des mehrmals angeführten Werthes der geodätischen Krümmung der Hauptkrümmungslinie die aus

den im ersten Capitel angegebenen Werthen für Torsion und Krümmung der Kantlinie einer abwickelbaren Normalfläche leicht herzuleitende allgemeingiltige Beziehung

$$d^3\eta = \frac{u}{r}\,dx\,d^2y$$

zu Tage treten lässt.

Für die t-Linie haben wir $d\zeta$ und $d^2\zeta$ unter den Bedingungen $dy_{,} + dy_{,,} = 0$ und $dx_{,} = dx_{,,} = dx$ aus der Gleichung

$$\zeta(q_{,} - q_{,,}) = y_{,} - y_{,,} + q_{,}z_{,} - q_{,,}z_{,,}$$

zu ermitteln, dann $dy_{,} = dy_{,,} = 0$ zu setzen, und finden:

$$d\zeta = -\frac{w}{r^2}\,dx \qquad d^2\zeta = -\left(\frac{\partial^{22} - r^3}{r^2} - \frac{2w^2}{r^3}\right)dx^2 - \frac{u}{r^2}\,d^2y$$

$$d^2\eta = 0 \qquad d^3\eta = -\frac{\partial^{31}}{r}\,dx^3$$

$$d^2\xi = -\frac{u - 2w}{r}\,dx^2 \quad d^3\xi = -\left(\frac{\partial^{40} - 3\partial^{22}}{r} - \frac{3w(u - 2w)}{r^2}\right)dx^3 + \frac{3u}{r}\,dx\,d^2y$$

aus welchen Werthen wir ebenfalls die Identitäten

$$\frac{dD_t}{ds} = w \qquad \frac{d^2D_t}{ds^2} = \partial^{22} - r^3 + \frac{u\partial^{31}}{2u - 3w}$$

constatiren können.

Wenn wir nun allgemein für ein Coordinatensystem $p = q = v = 0$ bezw. $p = q = \partial^{31} = 0$ die Bezeichnungen gebrauchen:

$$\frac{dD_s}{ds} = U \qquad \frac{dD_t}{ds} = W \qquad \frac{d^2D_s}{ds^2} = \Phi \qquad \frac{d^2D_t}{ds^2} = \Omega$$

in welchen ds das Bogenelement der die X-Achse tangirenden Krümmungslinie ist, so gelten also für diese Linie die Ausdrücke

$$U = u \qquad W = w \qquad \Phi = \partial^{40} - 3r^3 \qquad \Omega = \partial^{22} - r^3 + \frac{u\partial^{31}}{2u - 3w}$$

Bei Vergleich mit den entsprechenden Ausdrücken für einen allgemeinen Flächenpunkt findet man unter Berücksichtigung, dass das in Ω'' enthaltene Glied $\frac{vu}{r-t}$ in der Form $u\frac{d^2y}{dx^2}$ in der Rechnung erscheint, eine vollkommene Uebereinstimmung.

Die Krümmungslinien, welche schon in unendlicher Nähe eines Kreispunkts eine bekannte s-Linie orthogonal schneiden, nennen wir die t-Linien und bezeichnen ihren geodätischen Krümmungshalbmesser mit R_t. Im Kreispunkt selbst ist R_t, wie aus dem für den allgemeinen Flächenpunkt geltenden Werthe $\frac{1}{R_{\prime\prime}} = -\frac{w}{r-t}$ hervorgeht, gleich Null. Aus der allgemeinen Gleichung

$$\frac{dR_{\prime\prime}}{ds_\prime} = -R_{\prime\prime}^2 \frac{d}{ds_\prime}\frac{1}{R_{\prime\prime}} = \frac{(D_\prime - D_{\prime\prime})\Omega''}{W^2} - \frac{W(U-W)}{W^2}$$

finden wir, nachdem die geometrische Bedeutung der fraglichen Grössen auch für den Kreispunkt sichergestellt worden ist,

$$\frac{dR_t}{ds} = \frac{W-U}{W} = \frac{w-u}{w}$$

wobei der letzte Ausdruck für das entsprechende Coordinatensystem $p=q=v=0$ gilt. Für den Fall $w=0$ gilt dieser Ausdruck nicht, sondern wir finden aus der Identität

$$\frac{1}{R_t} = -\frac{W}{D_s - D_t}$$

welche entlang einer s-Linie bis in den Kreispunkt hinein gelten muss, durch Differentiation von Zähler und Nenner nach ds den Limeswerth

$$\frac{1}{R_t} = -\frac{\Omega}{U}$$

Im Falle $u = w \gtrless 0$ ergiebt sich $\frac{dR_t}{ds} = 0$, und durch Differentiation des allgemeinen Ausdruckes für $\frac{dR_{\prime\prime}}{ds_\prime}$:

$$\frac{d^2R_t}{ds^2} = \frac{\Omega - \Phi}{W}$$

Für den Fall, dass gleichzeitig u und w verschwinden, Ω aber von Null verschieden und mithin Lim. $R_t = 0$ ist, nimmt der allgemeine Ausdruck für $\frac{dR_{\prime\prime}}{ds_\prime}$, bei $D_\prime - D_{\prime\prime} = 0$, die Form $\frac{0}{0}$ an und giebt durch Differentiation von Zähler und Nenner nach ds

$$\frac{dR_t}{ds} = \frac{(U-W)\Omega - (D_s - D_t)d\Omega - W(\Phi - \Omega) - (U-W)\Omega}{2W\Omega} = \frac{\Omega - \Phi}{2\Omega}$$

Wenn wir das Bogenelement einer t-Linie auf der Fläche mit dt bezeichnen, so finden wir auf dieselbe Weise aus dem allgemeinen Ausdrucke

$$\frac{dR_{\prime\prime}}{ds_{\prime\prime}} = -R_{\prime\prime}^2 \Psi''$$

für den Kreispunkt:

$$\frac{dR_t}{dt} = \frac{2u}{w}$$

Obschon also im Kreispunkte selber weder R_t noch dt existirt, finden wir durch diesen Limeswerth die geometrische Bedeutung von u für die Asymmetrie der in unendlich kleiner Entfernung verlaufenden t-Linien in Bezug auf die s-Linie.

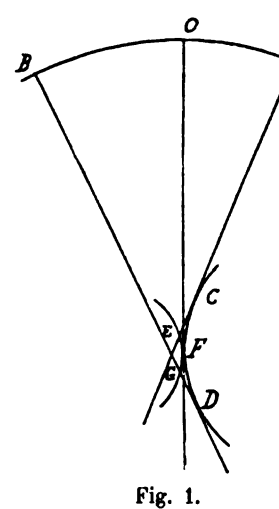


Fig. 1.

Nach diesen einleitenden Bemerkungen wollen wir die verschiedenen Typen der s- und t-Linien einer die Kreispunktsnormale enthaltenden abwickelbaren Normalfläche mit Hilfe einiger geometrischen Figuren kurz skizziren. In der Fig. 1 ist der Fall $u > 2w > 0$ dargestellt. O ist der Kreispunkt, F sein Krümmungsmittelpunkt, AC und BD die Normalen in den Punkten A und B, welche in C und D die s-Linie CFD tangiren und in E bezw. G die t-Linie EFG schneiden. Die Krümmungen dieser Linien sind nach den schon angegebenen Formeln

$$\frac{1}{R^s} = \frac{r^3}{u} \text{ bezw. } \frac{1}{R^t} = -\frac{r^3(u-2w)}{w^2}$$

die Krümmungsdifferenz mithin

$$\frac{1}{R^s} - \frac{1}{R^t} = \frac{r^3}{u}\left(1 - \frac{u}{w}\right)^2$$

Während nun die Tangente der s-Linie mit der Flächennormale identisch ist, so ist die Tangente der t-Linie Polare der entsprechenden t-Linie auf der Fläche. Die im Punkte E errichtete Tangente der

Linie EFG schneidet also die im Punkte A gelegte Tangentialebene der Fläche im geodätischen Krümmungsmittelpunkte der die Krümmungslinie AOB im Punkte A orthogonal schneidenden Krümmungslinie. Da die entsprechende Polare, die wir kurz t-Polare des Punktes A nennen, bei diesem Typus in der Richtung OB die Fläche schneidet, so ist $\frac{dR_t}{ds} < -1$.

Für den Fall $u = 2w$ hat die Linie EFG im Punkte F einen Inflexionspunkt, indem für die t-Linie

$$d^2\xi = 0$$

$$d^3\xi = \frac{D^5(\Phi - 3\Omega)}{W^3} d\zeta^3$$

gefunden wird. Je nachdem $\Phi - 3\Omega \gtrless 0$ ist, schneiden also die t-Polaren sowohl des Punktes A wie des Punktes B das Stück OB bezw. das Stück OA, und die Grösse $\frac{dR_t}{ds} + 1$ geht im Kreispunkte unter Wechsel des Vorzeichens durch Null hindurch. In Uebereinstimmung hiermit finden wir für den Kreispunkt durch Differentiation des Ausdruckes für $\frac{dR_{\prime\prime}}{ds_\prime}$ allgemein

$$\frac{d^2R_t}{ds^2} = \frac{\Omega(U - W)}{W^2} - \frac{\Phi - \Omega}{W} + \frac{\Omega(U - W)}{W^2} = \frac{\Omega(2U - W) - \Phi W)}{W^2}$$

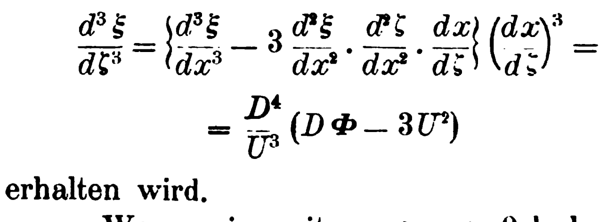
d. h. für den Fall $u = 2w$

$$\frac{d^2R_t}{ds^2} = \frac{3\Omega - \Phi}{W}$$

Ist $2w > u > w > 0$, so verläuft die Linie EFG zwischen der Linie CFD und der Normale OF, wobei fortwährend C zwischen A und E belegen ist. Die t-Polare des Punktes A trifft dann das Stück OA, und es ist mithin $0 > \frac{dR_t}{ds} > -1$.

Für den Fall $u = w$ besteht eine Berührung dritter Ordnung zwischen den Linien CFD und EFG, indem für beide Linien durch Einsetzen der oben gefundenen Werthe

$$\frac{d^2\xi}{d\zeta^2} = \frac{D^3}{U} \qquad \frac{d^3\eta}{d\zeta^3} = \frac{r^5}{u^3}\,\partial^{31}$$



$$\frac{d^3\xi}{d\zeta^3} = \left\{\frac{d^3\xi}{dx^3} - 3\,\frac{d^2\xi}{dx^2}\cdot\frac{d^2\zeta}{dx^2}\cdot\frac{dx}{d\zeta}\right\}\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^3 =$$

$$= \frac{D^4}{U^3}\left(D\Phi - 3U^2\right)$$

erhalten wird.

Wenn wir weiter $w > u > 0$ haben, so ist wieder die Krümmung der t-Linie kleiner als die der s-Linie, aber stets positiv, und E liegt, wie es die Fig. 2 zeigt, zwischen A und C, so dass die t-Polare des Punktes A jenseits A liegen muss, und $\frac{dR_t}{ds} > 0$ gefunden wird.

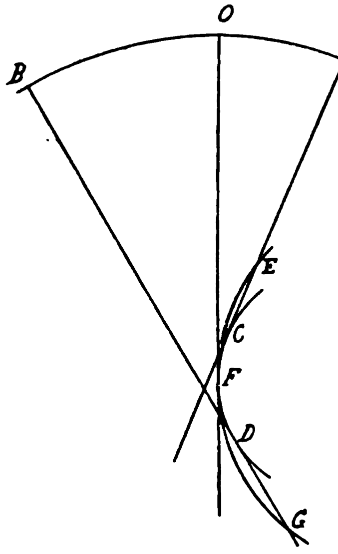
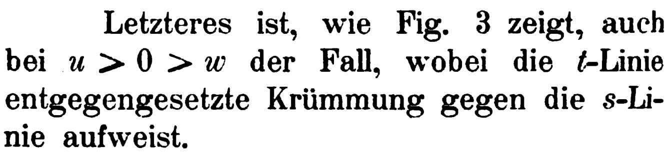
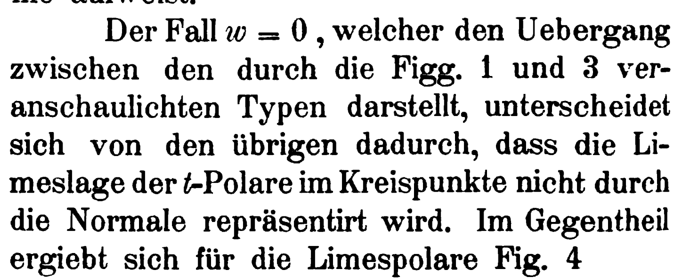


Fig. 2.



Letzteres ist, wie Fig. 3 zeigt, auch bei $u > 0 > w$ der Fall, wobei die t-Linie entgegengesetzte Krümmung gegen die s-Linie aufweist.



Der Fall $w = 0$, welcher den Uebergang zwischen den durch die Figg. 1 und 3 veranschaulichten Typen darstellt, unterscheidet sich von den übrigen dadurch, dass die Limeslage der t-Polare im Kreispunkte nicht durch die Normale repräsentirt wird. Im Gegentheil ergiebt sich für die Limespolare Fig. 4

$$\frac{d\zeta}{d\xi} = \frac{0}{0} = \frac{d^2\zeta}{d^2\xi} = \frac{\Omega}{DU}$$

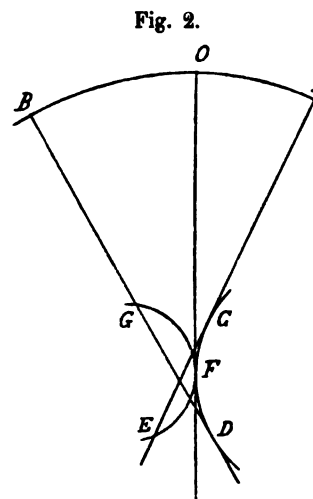


Fig. 3.

in Uebereinstimmung mit dem schon gefundenen Werth von Lim $\frac{1}{R_t}$. Dies ist in der That die geometrische Bedeutung dieses Limeswerthes in den Fällen, wo die Linie AOB in O von einer Krümmungslinie orthogonal geschnitten wird, welche nicht demselben System angehört, wie die dieselbe Linie in anderen Punkten schneidenden Krümmungslinien, und welche demnach eine nach den gewöhnlichen Regeln zu ermittelnde, vom fraglichen Limeswerthe abweichende geodätische Krümmung haben kann.

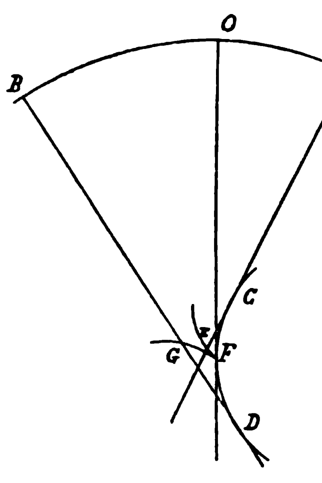


Fig. 4.

Ist $u=0$, wie es die Fig. 5 darstellt, so hat die t-Linie die Krümmung $\frac{2r^3}{w}$ und die s-Linie eine Spitze, für welche dieselben Werthe gelten, wie für das allgemeine Flächenelement. Wenn dabei auch $w=0$ ist, mithin für beide Linien sowohl $d\zeta$ wie $d^2\xi$ gleich Null werden, so hat auch die t-Linie eine ähnliche Spitze. Für die beiden Spitzen finden wir nun folgende Werthe:

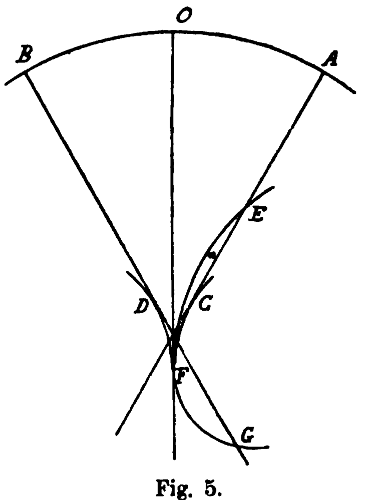


Fig. 5.

s-Linie	t-Linie
$d^3\xi = \frac{2\Phi}{D} ds^3$	$d^3\xi = -\frac{\Phi - 3\Omega}{D} ds^3$
$d^2\zeta = -\frac{\Phi}{D^2} ds^2$	$d^2\zeta = -\frac{\Omega}{D^2} ds^2$

Die entsprechenden semicubischen Parabeln sind:

$$9\Phi\xi^2 = -8D^4(\zeta-\varrho)^3$$

$$9^3\Omega\xi^2 = -2D^4(\Phi-3\Omega)^2(\zeta-\varrho)^3$$

Fig. 6.

Die Krümmungshalbmesser der Evoluten dieser Spitzen ergeben sich am bequemsten durch Differentiation dieser Gleichungen. Bei Beachtung der Richtung, in welcher wir eine Krümmung positiv rechnen, finden wir:

$$+\frac{\Phi}{D^4} \qquad\qquad +\frac{4\Omega^3}{D^4(\Phi-3\Omega)^2}$$

Der Unterschied dieser Krümmungs halbmesser

$$\frac{(\Phi-\Omega)^2(\Phi-4\Omega)}{D^4(\Phi-3\Omega)^2}$$

besagt, dass die Spitzen bei $\Phi = 4\Omega$ bis auf unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung als der dritten übereinstimmen, und dass die t-Linie innerhalb der s-Linie liegt, wenn $4\Omega \gtrless \Phi \gtrless 0$ ist.

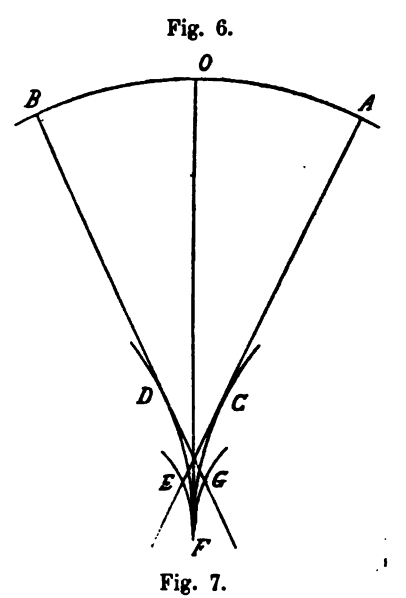


Fig. 7.

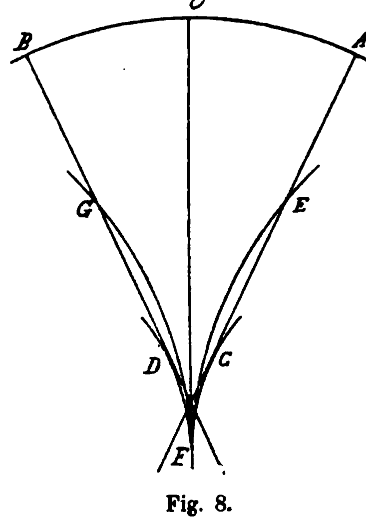


Fig. 8.

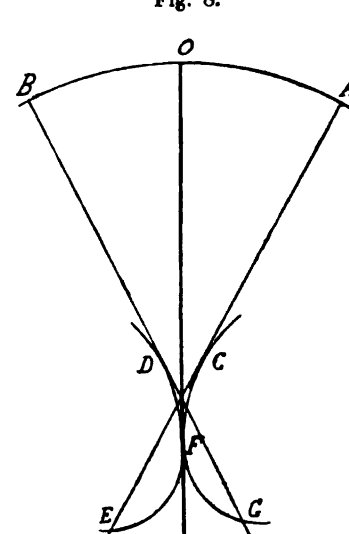


Fig. 9.

Von den verschiedenen Typen des Verlaufs der beiden Linien zeigt die Fig. 6 den Fall $3\Omega > \Phi > \Omega > 0$, wobei die t-Polare des Punkts A das Stück OA trifft, mithin $0 > \frac{dR_t}{ds} > -1$ ist. In der Fig. 7, welche den Fall $\Phi > 4\Omega > 0$ repräsentirt, trifft die fragliche Polare die Verlängerung des Stückes OB, und es ist mithin $\frac{dR_t}{ds} < -1$. Wenn $\Phi = 4\Omega$ ist, fallen die entgegengesetzten Schenkel der beiden Linien zusammen, und wenn $4\Omega > \Phi > 3\Omega$ ist, verläuft das Stück EF zwischen DF und OF. Erst wenn $\Phi = 3\Omega$ ist, fallen EF und FG bis auf unendlich kleine Grössen vierter Ordnung mit der Kreispunktsnormale OF zusammen, und es ist $\frac{dR_t}{ds} = -1$. Bei $\Phi = \Omega$ fallen die Stücke EF und CF bezw. FG und FD zusammen, wobei $\frac{dR_t}{ds} = 0$ gefunden wird. Im Falle $\Omega > \Phi > 0$, der in der Fig. 8 dargestellt ist, liegt immer das Stück EF zwischen CF und OF, wobei die t-Polare des Punktes A ausserhalb A die Linie AOB trifft, so dass $\frac{dR_t}{ds} > 0$ ist, wie es auch bei dem in der Fig. 9 repräsentirten Typus $\Phi > 0 > \Omega$ der Fall ist. Im Falle $\Omega = 0$ bildet wieder die t-Polare des Kreispunkts einen endlichen Winkel mit der Kreispunktsnormale, aber die Differentialquotienten vierter Ordnung der Flächengleichung reichen nicht aus, um diesen Winkel zu bestimmen.

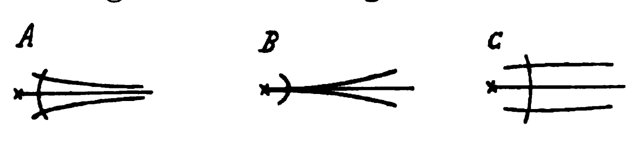
Zur Untersuchung der *Krümmungslinienfigur eines Kreispunktes* haben wir zuerst nachzusehen, was aus dem für den allgemeinen Flächenpunkt gültigen LIOUVILLE'schen Satze

$$\frac{d}{ds_{,}}\frac{1}{R_{,,}} + \frac{d}{ds_{,,}}\frac{1}{R_{,}} = \frac{1}{R^2_{,}} + \frac{1}{R^2_{,,}} + D_{,}D_{,,}$$

beim Eintritt einer Krümmungslinie in den Kreispunkt resultirt, wenn $R_{,,}$ nach Null hin abnimmt. Es ergiebt sich nach Multiplication mit $R^2_{,,}$ für den Kreispunkt:

$$R_{,}^2 \frac{d}{dt}\frac{1}{R_{,}} = \frac{dR_{,}}{ds} + 1$$

unter der Voraussetzung, dass die geodätische Krümmung $\frac{1}{R_{,}}$ der in den Kreispunkt eintretenden Krümmungslinie einen endlichen Werth hat und Lim. $R_{,} = 0$ ist. Wenn $\frac{dR_{,}}{ds} + 1 > 0$ ist, kehren also die nächstliegenden Krümmungslinien derselben Schaar ihre convexe Seite, wenn aber $\frac{dR_{,}}{ds} + 1 < 0$ ist, ihre concave Seite der in den Kreispunkt eintretenden Krümmungslinie zu, während für $\frac{dR_{,}}{ds} + 1 = 0$ das eine oder das andere der Fall sein kann, oder die nächstliegenden Krümmungslinien derselben Schaar auf der einen Seite der fraglichen s-Linie ihre convexe Seite auf der anderen ihr die concave Seite zuwenden können. Hiernach ergeben sich für die nächstliegenden Krümmungslinien bei Eintritt einer s-Linie in einen Kreispunkt die in den Figg. 10 A—F dargestellten möglichen Verlaufstypen. Bei A ist $\frac{dR_{,}}{ds} > 0$, und die nächstliegenden Krümmungslinien müssen einen beim Kreispunkt ausbiegenden Verlauf nehmen, wobei sie von einer oder mehreren in den Kreispunkt eintretenden Krümmungslinien orthogonal geschnitten werden müssen, um dann längs einer anderen vom Kreispunkte wegzuziehen. In Kreispunkten mit nur zwei Haupttangenten können daher als Grenzform dieser ausbiegenden Krümmungslinien die in F dargestellten horizontalen vorbeigehenden Krümmungslinien vorkommen. Endlich ist es auch möglich, dass sie sich einer anderen Krümmungslinie anschmiegen und so in den Kreispunkt ein-



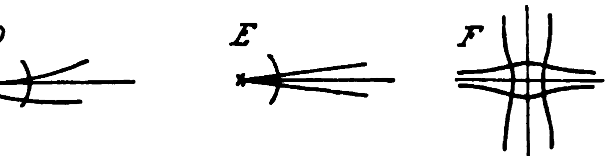


Fig. 10.

treten. Bei B ist $0 > \frac{dR_t}{ds} > -1$, und die nächstliegenden Krümmungslinien müssen sich der gegebenen anschmiegen, wobei eine Berührung zweiter Ordnung zwischen ihnen im Kreispunkte stattfinden muss, weil nur in der gegebenen Richtung und mit der gegebenen geodätischen Krümmung Krümmungslinien eintreten können. Bei C ist $\frac{dR}{ds} < -1$, und die nächstliegenden Krümmungslinien müssen sich entweder einer anderen in den Kreispunkt eintretenden Krümmungslinie anschmiegen, oder aber um den Kreispunkt herumbiegen. Bei Vorhandensein von nur zwei rechtwinkelig sich kreuzenden Haupttangenten kommt, wie wir sehen werden, beides vor, und als Grenzform der umbiegenden Krümmungslinien finden wir die in F dargestellten verticalen vorbeigehenden. Endlich haben wir bei $\frac{dR_t}{ds} + 1 = 0$ sowohl die Typen B und C wie D mit einstrahlenden Krümmungslinien auf der einen Seite und umbiegenden auf der anderen, dann aber auch bei unbestimmter Orientirung der Haupttangenten die in E repräsentirten geradlinig einstrahlenden Krümmungslinien.

Wir drücken diese Resultate des Liouville'schen Satzes so aus: *Wenn* $\frac{dR_t}{ds} > 0$ *ist, so sind die nächstliegenden Krümmungslinien derselben Schaar ausbiegend; bei* $0 > \frac{dR_t}{ds} > -1$ *schmiegen sie sich der fraglichen Krümmungslinie an; bei* $\frac{dR_t}{ds} < -1$ *sind sie umbiegend. Die ausbiegenden und die umbiegenden collateralen Krümmungslinien können im Grenzfalle vorbeigehend sein, oder aber sie können sich einer anderen in den Kreispunkt eintretenden Krümmungslinie anschmiegen. Bei* $\frac{dR_t}{ds} = -1$ *können geradlinig einstrahlende Krümmungslinien, sowie Combinationen von anschmiegenden und umbiegenden vorkommen.*

Der Beweis, dass sämmtliche dieser Formen wirklich existiren, ist zwar nicht durch den Liouville'schen Satz gegeben, wird aber weiter unten geliefert werden.

Die Kenntniss der anschmiegenden Krümmungslinien ist für die Construction der Krümmungslinienfigur unumgänglich nothwendig, um zu bestimmen, ob zwei consecutive Haupttangenten Krümmungslinien einer und derselben Schaar angehören oder nicht. Im ersten Falle,

wo also die in den beiden Richtungen eintretenden Krümmungslinien in der Nähe des Kreispunktes von einer und derselben Krümmungslinie der anderen Schaar orthogonal geschnitten werden, müssen nämlich die orthogonalen Trajectorien dieser auf irgend eine Weise in den Kreispunkt hineinkommen, und da dieses nur in den gegebenen Richtungen möglich ist, müssen sie sich der einen oder anderen Linie anschmiegen. Wir schliessen hieraus, dass, wenn consecutive Haupttangenten eintretenden Krümmungslinien einer und derselben Schaar angehören, für die eine $0 > \frac{dR_t}{ds} > -1$ bezw. $\frac{dR_t}{ds} = -1$ sein muss.

In geometrischer Hinsicht interessant ist es, wenn wir bei einer fortwährender Drehung des Coordinatensystemes u als Funktion von ϑ auffassen, wobei die Haupttangenten den Richtungen $\frac{du}{d\vartheta} = 0$ entsprechen, da $\frac{du}{d\vartheta} = 3v$ und $\frac{dv}{d\vartheta} = 2w - u$ bei $\vartheta = 0$ ist, dass anschmiegende Krümmungslinien nicht vorkommen können, wenn die fragliche Linie einem $u =$ Max. bei $u > 0$ entspricht. Bei einer solchen Drehung um einen Winkel π müssen sämmtliche Grössen $uvwu$ wenigstens einmal durch Null hindurchgehen. Die bezüglichen Richtungen nennen wir eine Linie $u = 0$, eine Linie $v = 0$ u. s. w. Eine Linie $u = 0$ wird also durch diejenige Tangente im Kreispunkt repräsentirt, welche in einem Coordinatensysteme $p = q = u = 0$ mit der X-Achse zusammenällt. Die Linien $v = 0$ haben wir schon als Haupttangenten definirt. Senkrecht auf ihnen stehen die Linien $w = 0$. Eben so verhalten sich die Richtungen $u = 0$ zu den Linien $u = 0$. Letstere haben, wie wir sehen werden, ihre Bedeutung sowohl für die Krümmungslinienfigur wie für die Evolute.

In einem Coordinatensystem $p = q = v = 0$ haben wir für die Orientirung der übrigen Haupttangenten die quadratische Gleichung

$$w \operatorname{tg}^2 \vartheta - u \operatorname{tg} \vartheta + u - 2w = 0$$

Wenn wir nun die drei möglichen in den Kreispunkt eintretenden Krümmungslinien und die zwischen ihnen gebildeten, immer positiv gerechneten Winkel nach dem Schema der Fig. 11 mit $s_{\prime}, s_{\prime\prime}, s_{\prime\prime\prime}$ bezw. $\omega_{\prime}, \omega_{\prime\prime}, \omega_{\prime\prime\prime}$ bezeichnen, so haben wir für die $s_{\prime}$-Linie d. h. für dasjenige Cordinatensystem $p = q = v = 0$, in welchem die $s_{\prime}$-Linie

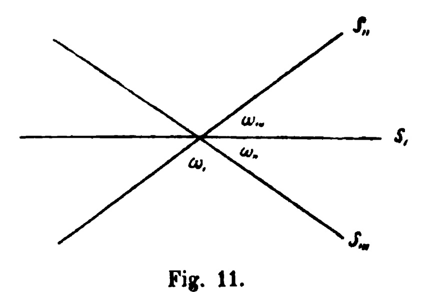


Fig. 11.

mit der X-Achse zusammenfällt, und wenn $\vartheta_{,}, \vartheta_{,,}$ die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung sind:

$$\operatorname{tg}\vartheta_{,} \operatorname{tg}\vartheta_{,,} = \frac{u-2w}{w} = -\left(\frac{dR_t}{ds}+1\right) = -\operatorname{tg}\omega_{,,} \operatorname{tg}\omega_{,,,}$$

$$\operatorname{tg}\vartheta_{,} + \operatorname{tg}\vartheta_{,,} = \frac{u}{w} = \frac{1}{2}\frac{dR_t}{dt} = \operatorname{tg}\omega_{,,,} - \operatorname{tg}\omega_{,,}$$

$$\operatorname{tg}\vartheta_{,} - \operatorname{tg}\vartheta_{,,} = \pm\frac{\sqrt{u^2-4w(u-2w)}}{w} = \operatorname{tg}\omega_{,,} + \operatorname{tg}\omega_{,,,}$$

Aus den Indentitäten

$$1-\operatorname{tg}\omega_{,,}\operatorname{tg}\omega_{,,,} = \frac{\cos(\omega_{,,}+\omega_{,,,})}{\cos\omega_{,,}\cos\omega_{,,,}} = -\frac{\cos\omega_{,}}{\cos\omega_{,,}\cos\omega_{,,,}}$$

finden wir nun:

$$\frac{1}{\cos\omega_{,}\cos\omega_{,,}\cos\omega_{,,,}} = \frac{1}{\cos^2\omega_{,}}\cdot\frac{dR_t}{ds_{,}} = \frac{1}{\cos^2\omega_{,,}}\frac{dR_t}{ds_{,,}} = \frac{1}{\cos^2\omega_{,,,}}\frac{dR_t}{ds_{,,,}}$$

indem wir mit $\frac{dR_t}{ds_n}$ den Werth bezeichnen, welchen $\frac{dR_t}{ds}$ in dem bezüglichen Coordinatensystem $p=q=v=0$ annimmt. Da nun weiter

$$\frac{1}{\cos^2\omega_{,}} = 1+\operatorname{tg}^2(\omega_{,,}+\omega_{,,,}) = 1+\frac{u^2-4w(u-2w)}{(u-w)^2}$$

ist, so haben wir

$$\frac{1}{\cos\omega_{,}\cos\omega_{,,}\cos\omega_{,,,}} = -\frac{u^2+(u-3w)^2}{w(u-w)} = \frac{1}{\cos^2\omega_n}\frac{dR_t}{ds_n} = \frac{dR_t}{ds_{,}}\cdot\frac{dR_t}{ds_{,,}}\cdot\frac{dR_t}{ds_{,,,}}$$

Aus diesem Ausdrucke sehen wir, dass, wenn in einem Coordinatensystem $p=q=v=0$ $w(u-w)<0$ gefunden wird, wobei immer drei Haupttangenten existiren, sämmtliche Winkel ω spitz sind, und für alle s-Linien $\frac{dR_t}{ds}>0$ ist. Ist $w(u-w)>0$, so können eine, zwei oder drei Haupttangenten vorhanden sein, einer der Winkel ω ist grösser als $\frac{\pi}{2}$, so dass sämmtliche Haupttangenten innerhalb eines Quadrantes verlaufen, und $\frac{dR_t}{ds}$ hat einen negativen Werth. Den Uebergang zwischen diesen beiden Typen finden wir, wenn $w(u-w)=0$ ist, wobei immer zwei orthogonale Krümmungslinien und eine Linie $v=u-w=0$ existiren, letztere aber mit einer der ersteren zusammenfallen kann.

Aus den S. 68 gegebenen Transformationsgleichungen für das Coordinatensystem finden wir für die Existens von etwaigen Linien $u = 0$ in einem Coordinatensystem $p = q = v = 0$ die cubische Gleichung

$$u \operatorname{tg}^3 \theta + 3w \operatorname{tg} \theta - u = 0$$

welche nur eine reelle Wurzel hat, sobald

$$u^2 u^2 + 4 w^3 u > 0$$

ist. Es existirt also in den Kreispunkten, für welche nicht $\frac{dR_t}{ds} > 0$ ist immer nur eine Linie $u = 0$, während in den übrigen eine, zwei oder drei solche Linien vorkommen können.

Von den verschiedenen Krümmungslinienfiguren wollen wir zuerst die einfachste, die in der Fig. 12 dargestellte, diskutiren. Sie entspricht dem Falle $u \gtrless 2w \gtrless 0$ bei $u^2 < 4w(u - 2w)$ wobei $\frac{dR_t}{ds} < -1$ ist und nur umbiegende collaterale Krümmungslinien vorkommen. Der Grad der Asymmetrie im Verlaufe der Krümmungslinien hängt ab von u, und zwar ist bei $u = 0$ der Verlauf symmetrisch, während der dargestellte Verlauf den Fall $\frac{u}{w} > 0$ zeigt, indem wir die Richtung nach rechts in der Figur als positive s, die nach oben als positive t rechnen. Da nämlich bis in den Kreispunkt hinein $\frac{dR_t}{dt} = \frac{2u}{w}$ ist und folglich einen positiven Werth hat, muss in der Figur ein negativer geodätischer Krümmungshalbmesser der t-Linien in der Richtung nach oben numerisch abnehmen, ein positiver zunehmen. Ist $u = 0$ und $u = 3w$, so hat die Fläche im Kreispunkte eine vollständige Berührung dritter Ordnung mit einer Fläche zweiten Grades, für welchen Fall LIOUVILLE[1], was das Ellipsoid betrifft, eine schöne Zeichnung gegeben hat.

Fig. 12.

Wenn zwei Haupttangenten existiren, entsteht die in der Fig. 13 dargestellte Krümmungslinienfigur. Da nämlich nur eine Linie $u = 0$ existirt, und die Haupttangenten den Linien $\frac{du}{d\vartheta} = 0$ entsprechen, so kann bei Vorhandensein von nur zwei Haupttangenten, nur die eine

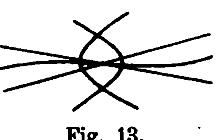


Fig. 13.

[1] In seiner Ausgabe von MONGE, Application de l'analyse à la géometrie, Paris 1850.

einem Maximum oder Minimum von u als Funktion von ϑ entsprechen; für die andere muss im bezüglichen Coordinatensysteme $p = q = v = 0$ $\frac{d^2 u}{d\vartheta^2} = 3(2w - u) = 0$ sein. Es ist also in dem einen dieser Coordinatensysteme $u = 2w$, während in dem anderen $\mathfrak{u}^2 = 4w(u - 2w)$ sein muss, und die entsprechenden Krümmungslinien haben $\frac{dR_t}{ds_,} = -1$ bezw. $\frac{dR_t}{ds_{,,}} < -1$. Wir bezeichnen die Werthe, welche $u\,w\,\mathfrak{u}$ in den verschiedenen Coordinatensystemen $p = q = v = 0$ annehmen, mit $u_, w_, \mathfrak{u}_,$ $u_{,,} w_{,,} \mathfrak{u}_{,,}$ u. s. w. und haben also in dem dargestellten Falle $u_, = 2w_,$. Für den Winkel $\omega_{,,,}$ finden wir aus der quadratischen Gleichung für $\operatorname{tg}\vartheta$

$$\operatorname{tg}\omega_{,,,} = \frac{\mathfrak{u}_,}{w_,} = -\frac{\mathfrak{u}_{,,}}{2w_{,,}},$$

da in dem einen Coordinatensysteme $\operatorname{tg}\omega_{,,,} = \operatorname{tg}\vartheta$ in dem anderen $\operatorname{tg}\omega_{,,,} = -\operatorname{tg}\vartheta$ zu setzen ist. Da nun keine Linie $w = 0$ im spitzen Winkel $\omega_{,,,}$ vorhanden sein kann, so muss die Linie $\mathfrak{u} = 0$ hier belegen sein, was auch damit stimmt, dass $\frac{dR_t}{dt}$ dasselbe Vorzeichen wie $\operatorname{tg}\vartheta$ in den beiden Coordinatensystemen hat. Für die $s_,$-Linie ist, da wir in der Figur $\operatorname{tg}\vartheta$ positiv gewählt haben, auch $\frac{dR_t}{dt}$ positiv. Weil nun $\frac{dR_t}{ds_,} + 1 = 0$ ist, so finden wir auf der bezüglichen nach dem spitzen Winkel gewendeten Seite der $s_,$-Linie die Bedingung $0 > \frac{dR_t}{ds} > -1$ während auf der anderen Seite der Linie $\frac{dR_t}{ds} < -1$ sein muss, d. h. die innerhalb des spitzen Winkels zwischen den Haupttangenten verlaufenden Krümmungslinien derselben Schaar schmiegen sich der $s_,$-Linie bei ihrem Eintritt in den Kreispunkt an.

Finden wir bei $w(u - w) > 0$ die Bedingung $\mathfrak{u}^2 > 4w(u - 2w)$ erfüllt, so existiren drei innerhalb eines Winkels von $\frac{\pi}{2}$ verlaufende Haupttangenten, wie sie die Fig. 14 zeigt. Da sämmtliche Linien $w = 0$ im grössten Winkel $\omega_,$ verlaufen, und das Produkt uw für alle Coordinatensysteme $p = q = v = 0$ positiv ist, die Linie $u = 0$ mithin auch im Winkel $\omega_,$ zu finden ist, so muss u für die Linien $s_{,,}$ und $s_{,,,}$ bei positivem Werthe

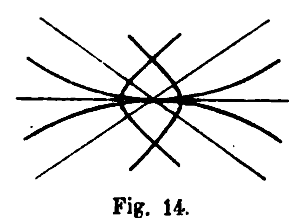


Fig. 14.

ein Maximum haben, während für die Linie $s_,$ das entgegengesetzte stattfindet. Es ist also $u_{,,} \gtrless 2w_{,,} \gtrless 0$ und $u_{,,,} \gtrless 2w_{,,,} \gtrless 0$, aber $2w_, \gtrless u_, \gtrless w_, \gtrless 0$ mithin auch $0 > \frac{dR_t}{ds_,} > -1$, während $\frac{dR_t}{ds_{,,}} < -1$ und $\frac{dR_t}{ds_{,,,}} < -1$ ist. Die mittlere der drei Linien ist also beiderseits von anschmiegenden Krümmungslinien derselben Schaar begleitet. Bei $2u_, = 3w_,$ hat die $s_,$-Linie, wofern nicht $\partial^{31}{}_, = 0$ ist, eine unendlich grosse geodätische Krümmung, indem aus der bezüglichen Ableitung der Differentialgleichung der Hauptkrümmungslinien $\frac{dy\, d^2y}{dx^3} = -\frac{\partial^{31}}{3u}$ oder bei $u = 0$ $\frac{dy^2 d^2y}{dx^4} = \frac{\partial^{31}}{5w}$ gefunden wird. Ist auch $\partial^{31} = 0$, so muss wieder $\frac{d^2y}{dx^2}$ einen endlichen Werth haben oder gleich Null sein. Es ist auch möglich, dass verschiedene endliche Werthe vorkommen. Für die $s_{,,}$-Linie sind beide Wurzeln der Gleichung von ϑ negativ, für die $s_{,,,}$-Linie positiv. Da mithin $\frac{u_{,,}}{w_{,,}} < 0$, aber $\frac{u_{,,,}}{w_{,,,}} > 0$ ist, die Linie $u = 0$ also in dem spitzen Winkel zwischen der $s_{,,}$- und $s_{,,,}$-Linie belegen ist, und da weiter $\operatorname{tg} \omega_{,,,} - \operatorname{tg} \omega_{,,} = \frac{u_,}{w_,}$ ist, so verläuft die Linie $u = 0$ innerhalb des der Grösse nach mittleren der drei Winkel ω, wenn sie nicht mit der $s_,$-Linie zusammenfällt. Als Uebergang zwischen einem solchen Typus und dem mit einer einzigen Haupttangente haben wir den Fall $u = 2w$ $u = 0$, wo je nach dem Werthe von $\frac{d^2R_t}{ds^2}$ anschmiegende Krümmungslinien längs der $s_,$-Linie auf der einen oder anderen Seite vom Kreispunkte bezw. bei $\frac{d^2R_t}{ds^2} = 0$ beiderseits oder gar nicht vorkommen können.

Die Kreispunkte, für welche $w(u - w) < 0$ ist, haben immer drei Haupttangenten; $\frac{dR_t}{ds}$ ist überall positiv, und sämmtliche Winkel ω sind spitz, wonach immer eine linie $w = 0$ zwischen je zwei Haupttangenten verläuft. Die Fig. 15 zeigt die Anordnung der Krümmungslinien. Aus der für $\omega_, + \omega_{,,} + \omega_{,,,} = \pi$ allgemein gültigen Beziehung

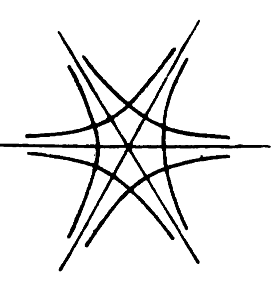


Fig. 15.

$$\operatorname{tg}\omega_{,} + \operatorname{tg}\omega_{,,} + \operatorname{tg}\omega_{,,,} = \operatorname{tg}\omega_{,} \operatorname{tg}\omega_{,,} \operatorname{tg}\omega_{,,,}$$

finden wir, da $\frac{dR_t}{ds_{,}} + 1 = \operatorname{tg}\omega_{,,} \operatorname{tg}\omega_{,,,}$ ist,

$$\frac{dR_t}{ds_{,}} = \frac{\operatorname{tg}\omega_{,,} + \operatorname{tg}\omega_{,,,}}{\operatorname{tg}\omega_{,}}$$

woraus hervorgeht, dass die Bedingung $\operatorname{tg}\omega_{,} > \operatorname{tg}\omega_{,,} + \operatorname{tg}\omega_{,,,}$ mit der Bedingung $\frac{dR_t}{ds_{,}} < 1$ d. h $w_{,} \gtrless u_{,} \gtrless 0$ identisch ist, so wie dass diese Bedingung nur für eine Haupttangente erfüllt sein kann, während für die beiden anderen w und u verschiedenes Vorzeichen haben müssen. Diese Bedingung ist auch mit der Bedingung

$$u^2 \mathfrak{w}^2 + 4 w^3 u > 0$$

für die Existenz nur einer Linie $\mathfrak{w} = 0$ identisch, da $u_{,} w_{,} > 0$ aber $u_{,,} w_{,,} < 0$ und $u_{,,,} w_{,,,} < 0$ ist, und in jedem Winkel ω eine Linie $w = 0$ vorkommt, mithin nur eine Linie $u = 0$ existiren kann, nämlich im Winkel $\omega_{,}$ [1]. Da in diesen Falle $\frac{\mathfrak{w}_{,,}}{w_{,,}}$ und $\frac{\mathfrak{w}_{,,,}}{w_{,,,}}$ entgegengesetzte Vorzeichen haben müsssen, $w_{,,}$ und $w_{,,,}$ aber ähnliche, so liegt wie im vorigen Falle die Linie $\mathfrak{w} = 0$ innerhalb des der Grösse nach mittleren winkels ω.

Wenn wir $\operatorname{tg}\omega_{,} = \operatorname{tg}\omega_{,,} + \operatorname{tg}\omega_{,,,}$ finden, so ist $\frac{dR_t}{ds_{,}} = 1$, mithin $u_{,} = 0$, und für sämmtliche Haupttangenten

$$u^2 \mathfrak{w}^2 + 4 w^3 u = 0$$

Aus derselben Ursache wie im vorigen Falle verläuft die andere Linie $u = 0$ innerhalb des Winkels $\omega_{,}$. Von den beiden Linien $\mathfrak{w} = 0$ steht die eine senkrecht auf der $s_{,}$-Linie, die andere liegt wie sonst innerhalb des Winkels mittlerer Grösse, wenn sie nicht mit der $s_{,}$-Linie zusammenfällt.

Wenn für keinen der Winkel ω die Tangente so gross ist wie die Summe der Tangenten der beiden anderen, so ist für alle Haupttangenten $\frac{dR_t}{ds} > 1$ und $uw < 0$. Zwischen je zwei der Haupttangen-

[1] Mehr als eine Linie $u = 0$ kann nicht zwischen zwei Haupttangenten vorkommen, da die Linien $\frac{du}{d\vartheta} = 0$ Haupttangenten sind.

ten verläuft sowohl eine Linie $u = 0$ wie eine Linie $w = 0$. Unter Beachtung des Werthes von $\frac{du}{d\vartheta}$ sowie der Bedeutung von $\frac{u}{w}$ für den Unterschied der naheliegenden Winkel ω und des Umstandes, dass zwischen je zwei Linien $w = 0$ eine Linie $u = 0$ verläuft, finden wir, dass, wenn alle Winkel ω verschiedener Grösse sind, eine Linie $u = 0$ wie gewöhnlich innerhalb des Winkels ω mittlerer Grösse liegt, während die beiden anderen innerhalb des grössten Winkels ω belegen sind. Sind zwei Winkel gleich gross, wobei die zwischenliegende $s_{,}$-Linie $u = 0$ hat, so verlaufen die übrigen beiden Linien $u = 0$ entweder, wenn der dritte Winkel der grösste ist, innerhalb dieses oder im entgegengesetzten Falle je eine innerhalb eines der beiden grössten. Für den Fall $\omega_{,} = \omega_{,,} = \omega_{,,,}$, wobei die Linien $u = 0$ mit den Haupttangenten zusammenfallen, ist für alle diese $u = -w$ und $\frac{dR_{,}}{ds} = 2$.

Die Kreispunkte, deren Krümmungslinienfiguren wir bis jetzt untersucht haben, nennen wir *einfache Kreispunkte*, weil zwar $D_{,} - D_{,,} = 0$ ist, aber längs sämmtlichen in den Kreispunkt eintretenden Krümmungslinien $dD_{,} - dD_{,}$ einen endlichen Werth hat. Ein kurzer Blick auf die Krümmungslinienfiguren zeigt uns unmittelbar, dass in einem einfachen Kreispunkte keine Krümmungslinie durch den Kreispunkt hindurchgeht sondern längs einer Haupttangente je eine Krümmungslinie der beiden Schaaren sich im Kreispunkte begegnen.

Die Kreispunkte, für deren Coordinatensysteme $p = q = v = 0$ die Bedingung $w(u - w) = 0$ erfüllt ist, haben drei Haupttangenten, von denen zwei $w = 0$ haben und auf einander senkrecht stehen, während die dritte eine Linie $v = u - w = 0$ darstellt, die jedoch bei $u = w = 0$ mit einer der beiden erstgenannten zusammenfällt, so dass nur zwei orthogonale Haupttangenten existiren. Da längs dieser Linie $u = w$ $dD_{,} = dD_{,}$ ist, so kann der Kreispunkt als aus zwei einfachen Kreispunkten zusammengesetzt betrachtet werden oder auch als eine unendlich kleine Linie spärischer Krümmung angesehen werden, wobei jedoch der Krümmungsradius der osculirenden Sphäre nicht constant ist. Wir wählen $\omega_{,} = \frac{\pi}{2}$, also $u_{,} = w_{,}$ und erinnern uns, dass für die $s_{,,}$- und $s_{,,,}$-Linien Lim. $R_{,}$ einen endlichen Werth hat. Das Aussehen der Krümmungslinienfigur hängt also nur davon ab, ob längs der $s_{,}$-Linie anschmiegende Krümmungslinien vorkommen oder nicht. Wie

schon S. 75 angeführt, haben wir $\frac{dR_t}{ds_{,}} = 0$ und $\frac{d^2R_t}{ds_{,}^2} = \frac{\Omega - \Phi}{w}$, vonach also, wenn $w > 0$, was eventuell durch Drehung des Coordinatensystemes um einen Winkel π erreicht wird, und $\Phi - \Omega$ grösser alls Null ist, $\frac{dR_t}{ds_{,}}$ beim Durchgehen der $s_{,}$-Linie durch den Kreispunkt in der Richtung wachsender X von einem Werthe $\frac{dR_t}{ds} > 0$ zu einem Werthe $0 > \frac{dR_t}{ds} > -1$ übergeht. In diesem Falle hat also die $s_{,}$-Linie nach der im Coordinatensysteme $w > 0$ positiven Richtung von X anschmiegende collaterale Krümmungslinien, wie die Fig. 16 zeigt. Der Uebergang zwischen den in den Figg. 14 und 15 dargestellten Typen ist hierdurch gegeben. Ist $\Phi = \Omega$, so hängt es von dem Werthe $\frac{d\Phi - d\Omega}{ds_{,}}$ ab, ob der Kreispunkt den einen oder anderen dieser Typen aufweist, indem der Winkel ω, von der einen oder anderen Seite den Grenzwerth $\frac{\pi}{2}$ erreicht. Bei dem in der Fig. 16 dargestellten Typus begegnen wir zum ersten Mal einer durch den Kreispunkt wirklich hindurchgehenden Krümmungslinie.

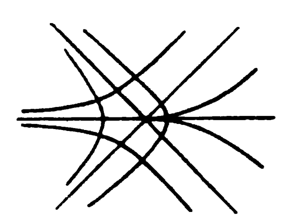


Fig. 16.

Bei der Untersuchung von Flächenelementen mit zwei oder mehreren unendlich nahe belegenen Kreispunkten werden wir sehen, dass der eben beschriebene Typus in der Wirklichkeit durch Zusammenrücken von zwei einfachen Kreispunkten entsteht. Für den Fall, dass die Linie $u = w$ mit einer der beiden anderen zusammenfällt, wobei also $u_{,} = w_{,} = 0$ $u_{,,} = w_{,,} = 0$ ist, kann die Diskussion erst in Anschluss an dieser Untersuchung gegeben werden.

Diejenigen Kreispunkte, für welche sämmtliche Differentialquotienten dritter Ordnung in der Flächengleichung gleich Null sind, und welche immer als aus zwei oder mehreren einfachen Kreispunkten zusammengesetzt angesehen werden können, sollen hier nur be-

treffs der praktisch wichtigsten Formen, derjenigen, welche zwei orthogonale Symmetrieebenen, entsprechend zwei Coordinatensystemen $p = q = \partial^{31} = \partial^{13} = 0$ aufweisen, eingehender untersucht werden. Was die übrigen betrifft, genügt es zu zeigen, dass der Typus mit umbiegenden offenen Krümmungslinien, welcher einen Winkel $\omega > \frac{\pi}{2}$ verlangt, niemals vorkommen kann. In solchem Falle müssten nämlich sämmtliche Haupttangenten innerhalb eines Winkels $\frac{\pi}{2}$ verlaufen, und es wäre möglich, dass in einem Coordinatensysteme $p = q = \partial^{31} = 0$ sämmtliche drei Wurzeln $\operatorname{tg}\vartheta_,$ $\operatorname{tg}\vartheta_{,,}$ $\operatorname{tg}\vartheta_{,,,}$ der cubischen Gleichung

$$\partial^{13}\operatorname{tg}^3\vartheta - (\partial^{04} - 3\partial^{22})\operatorname{tg}^2\vartheta - 3\partial^{13}\operatorname{tg}\vartheta + \partial^{40} - 3\partial^{22} = 0$$

für die Orientirung der übrigen Haupttangenten das gleiche Vorzeichen hätten, was aber unmöglich ist, da aus den bezüglichen Coefficienten die Relation

$$\operatorname{tg}\vartheta_,\operatorname{tg}\vartheta_{,,} + \operatorname{tg}\vartheta_{,,}\operatorname{tg}\vartheta_{,,,} + \operatorname{tg}\vartheta_,\operatorname{tg}\vartheta_{,,,} = -3$$

sich ergiebt.

Wie aus den S. 68 gegebenen Transformationsgleichungen des Coordinatensystems erhellt, ist

$$\frac{d\partial^{40}}{d\vartheta} = 4\partial^{31} = 0 \qquad \frac{d\partial^{31}}{d\vartheta} = 3\partial^{22} - \partial^{40} \qquad \frac{d^2\partial^{31}}{d\vartheta^2} = 3\frac{d\partial^{22}}{d\vartheta} = 6\partial^{13}$$

in einem Coordinatensysteme $p = q = \partial^{31} = 0$ und für $\vartheta = 0$. Es folgt hieraus, dass, wenn für ein solches Coordinatensystem $\partial^{40} = 3\partial^{22}$ und $\partial^{13} \gtrless 0$ ist, nur drei Haupttangenten existiren, indem diese Linie weder einem Maximum noch einem Minimum von ∂^{40} als Funktion von ϑ entspricht. Ist aber in einem Coordinatensystem $p = q = \partial^{31} = \partial^{13} = 0$ die Bedingung $\partial^{40} = 3\partial^{22}$ erfüllt, dann ist diese Linie im Allgemeinen wieder eine Linie $\partial^{40} = \text{Max.}$ oder $\partial^{40} = \text{Min.}$

Für diese Coordinatensysteme giebt uns die Gleichung

$$\operatorname{tg}^2\vartheta = \frac{\partial^{40} - 3\partial^{22}}{\partial^{04} - 3\partial^{22}}$$

Aufschluss über die Existenz von anderen Haupttangenten als den beiden mit der X- bezw. Y-Achse zusammenfallenden. Die Gleichung besagt, dass, wenn die beiden orthogonalen Haupttangenten gleichzeitig Linien $\partial^{40} = \text{Max.}$ oder Linien $\partial^{40} = \text{Min.}$ sind, ausser ihnen noch zwei existiren, deren Verlauf symmetrisch in Bezug auf die erstgenann-

ten ist. Wir bezeichnen die von der X-Achse tangirte Krümmungslinie mit $s_{,}$, die von der Y-Achse tangirte mit $s_{,,}$ und die beiden übrigen mit $s_{,,,}$, und haben also:

$$\Phi_{,} = \partial^{40} - 3r^3 \qquad \Phi_{,,} = \partial^{04} - 3r^3 \qquad \Omega_{,} = \Omega_{,,} = \partial^{22} - r^3 = \Omega$$

Aus den Transformationsgleichungen des Coordinatensystems finden wir nach Subtraction der Gleichung

$$r^3 = r^3 \cos^4 \vartheta + 2r^3 \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta + r^3 \sin^4 \vartheta$$

(bezw. nach Multiplication mit 3), die zwei Gleichungen

$$\frac{\partial^4 \zeta}{\partial \xi^4} - 3r^3 = \Phi_{,} \cos^4 \vartheta + 6\,\Omega \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta + \Phi_{,,} \sin^4 \vartheta$$

$$\frac{\partial^4 \zeta}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} - r^3 = \Omega \cos^4 \vartheta + (\Phi_{,} + \Phi_{,,} - 4\,\Omega) \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta + \Omega \sin^4 \vartheta$$

Da nun für die $s_{,,,}$-Linie

$$\operatorname{tg}^2 \vartheta = \frac{\Phi_{,} - 3\,\Omega}{\Phi_{,,} - 3\,\Omega}$$

ist, und also auch die Identitäten

$$(\Phi_{,} - 3\,\Omega) \cos^2 \vartheta = (\Phi_{,,} - 3\,\Omega) \sin^2 \vartheta = \frac{(\Phi_{,} - 3\,\Omega)(\Phi_{,,} - 3\,\Omega)}{\Phi_{,} + \Phi_{,,} - 6\,\Omega} =$$
$$= (\Phi_{,} + \Phi_{,,} - 6\,\Omega) \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta$$

bestehen, so finden wir:

$$\Phi_{,,,} = \frac{\Phi_{,}\Phi_{,,} - 9\,\Omega^2}{\Phi_{,} + \Phi_{,,} - 6\,\Omega}$$

$$\Omega_{,,,} = \Phi_{,,,} - 2\,\Omega = \frac{(\Phi_{,} - \Omega) \cos^2 \vartheta + (\Phi_{,,} - \Omega) \sin^2 \vartheta}{2}$$

woraus zunächst erhellt, dass, wenn $\Phi_{,} - \Omega$ und $\Phi_{,,} - \Omega$ dasselbe Vorzeichen haben, $\frac{dR_t}{ds}$ überall dasselbe Vorzeichen hat. Im Falle $\Phi_{,} \gtrless \Omega \gtrless \Phi_{,,}$ ist aber $\frac{dR_t}{ds_{,}} \gtrless 0 \gtrless \frac{dR_t}{ds_{,,}}$, und es kann $\frac{dR_t}{ds_{,,,}}$ positives oder negatives Vorzeichen haben.

Als Bedingung dafür, dass $\frac{dR_t}{ds}$ überall negativ ist, ergiebt sich also $\Omega(\Phi_{,} - \Omega) > 0$ gleichzeitig mit $\Omega(\Phi_{,,} - \Omega) > 0$ d. h. es müssen sämmtliche drei Grössen dasselbe Vorzeichen haben, und Ω die numerisch kleinste sein. Wenn hierbei 3Ω der Grösse nach zwischen $\Phi_{,}$ und $\Phi_{,,}$ liegt, so existiren nur die zwei orthogonalen Haupttangenten, wobei $\frac{dR_t}{ds} + 1$ für die eine grösser, für die andere kleiner als Null ist, so dass erstere beiderseits von anschmiegenden collateralen Krümmungslinien umgeben ist, und die Krümmungslinienfigur den in der Fig. 17 dargestellten Typus zeigt. In den Fällen aber, wo 3Ω numerisch grösser oder kleiner als beide Grössen Φ ist, sind auch die zwei $s_{,,,}$-Linien vorhanden. Im ersten Falle entsprechen die beiden orthogonalen Haupttangenten je einem numerischen Minimum, im zweiten einem numerischen Maximum von Φ als Funktion von ϑ, in beiden spielen die zwei symmetrischen die entgegengesetzte Rolle. Es wechselt also $\frac{dR_t}{ds} + 1$ das Vorzeichen von Haupttangente zu Haupttangente, und jede zweite von ihnen ist von anschmiegenden collateralen Krümmungslinien begleitet. Der Fall $3\Omega > \Phi_{,,} > \Phi_{,} > \Omega > 0$ ist in der Fig. 18 dargestellt. Ist für eine Linie $\Phi = 3\Omega$, so kann diese entweder dem Maximum oder dem Minimum von Φ als Funktion von ϑ entsprechen. Da hierbei keine $s_{,,,}$-Linien existiren, so wird dies von der Differenz $\Phi - 3\Omega$ für die andere Linie entschieden, wonach die Krümmungslinienfigur das Aussehen der Fig. 17 zeigt.

Fig. 17.

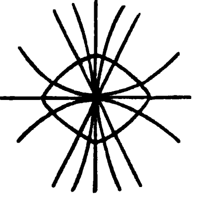
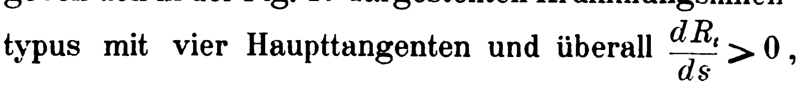


Fig. 18.

Für $\Phi_{,} = \Phi_{,,} = 3\Omega \gtrless 0$ hat die Fläche im Kreispunkte eine vollständige Berührung vierter Ordnung mit dem Scheitelpunkte einer Umdrehungsfläche, und jede Tangente im Kreispunkte ist eine Haupttangente. In diesem Falle strahlen also nach allen Richtungen Krümmungslinien radiär aus, und es ist für alle $\frac{dR_t}{ds} = -1$. Im Falle $\Phi = 2\Omega$ nimmt der Ausdruck für die geodätische Krümmung der Hauptkrümmungslinien die Form ∞ oder $\frac{0}{0}$ an, und es gilt das vom Fall $2u = 3w$ im allgemeinen Kreispunkte Gesagte. Wie ersichtlich treten diese Formen nur dann auf, wenn die fragliche Krümmungslinie beiderseits von anschmiegenden Krümmungslinien begleitet ist.

Die gleichzeitig erfüllten Bedingungen $\Omega(\Phi_{,}-\Omega)<0$, $\Omega(\Phi_{,,}-\Omega)<0$ geben den in der Fig. 19 dargestellten Krümmungslinientypus mit vier Haupttangenten und überall $\frac{dR_t}{ds}>0$,

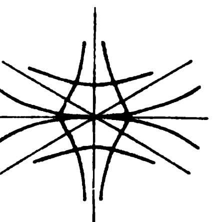


Hierher gehören auch die Fälle, wo $\Phi_{,}$ oder $\Phi_{,,}$ oder beide gleich Null sind, sowie der Fall $\Phi_{,}=\Phi_{,,}=-3\Omega$ welcher $\Phi_{,,,}=0$ giebt.

Fig. 19.

Die Fälle $\Phi_{,}\gtrless\Omega\gtrless\Phi_{,,}$, in welchen $\frac{dR_t}{ds}$ verschiedenes Vorzeichen für die beiden orthogonalen Haupttangenten hat, können wieder nur zwei oder auch vier Haupttangenten aufweisen. Im ersten Falle liegt nicht nur Ω, sondern auch 3Ω numerisch zwischen $\Phi_{,}$ und $\Phi_{,,}$, und es hat nicht nur $\frac{dR_t}{ds}$, sondern auch $\frac{dR_t}{ds}+1$ verschiedenes Vorzeichen für beide Linien. Da mithin keine von ihnen anschmiegende collaterale Krümmungslinien hat, können sie nicht einer und derselben Schaar angehören, sondern die Krümmungslinienfigur muss den schon in der Fig. 10 F. S. 81 dargestellten Typus aufweisen, welcher auch bei $\Phi_{,}=3\Omega$ oder $\Phi_{,,}=3\Omega$ gilt. Bei $\Omega=0$ hat Lim. R_t längs beiden Linien einen endlichen Werth, und die Krümmungslinienfigur unterscheidet sich nicht von der eines allgemeinen Flächenpunktes. Im Falle vier Haupttangenten existiren, wobei $\frac{dR_t}{ds}+1$ für die beiden orthogonalen positiv ist, hat eine von ihnen anschmiegende collaterale Krümmungslinien und zwar diejenige, welche innerhalb des spitzen von den beiden symmetrischen Haupttangenten gebildeten Winkels verläuft. Wenn nämlich z. B. $3\Omega\gtrless\Phi_{,}\gtrless\Omega\gtrless0$ und dabei $\Omega\gtrless\Phi_{,,}$ ist, so finden wir $0>\frac{dR_t}{ds_{,}}>-1$ und $\frac{dR_t}{ds_{,,}}>0$ bei $\operatorname{tg}^2\vartheta<1$. Da nun weiter $3\Omega_{,,,}-\Phi_{,,,}$ entgegengesetztes Vorzeichen gegen $3\Omega-\Phi_{,}$ und $\Omega_{,,,}-\Phi_{,,,}$ gegen Ω, diese aber wieder unter einander dasselbe Vorzeichen haben müssen, so folgt hieraus, dass $\frac{dR_t}{ds_{,,,}}$ und $\frac{dR_t}{ds_{,,,}}+1$ dasselbe Vorzeichen haben, mithin die $s_{,,,}$-Linien nicht von anschmiegenden Krümmungslinien begleitet sein können. Es gehören demnach die beiden symmetrischen Krümmungslinien derselben Schaar an wie die innerhalb des spitzen von ihnen gebildeten Winkels verlaufende, die vierte aber gehört der anderen Schaar an, und die Krümmungslinien

zeigen den in der Fig. 20 dargestellten Typus, wobei nur zu bemerken ist, dass längs der $s_{\prime\prime\prime}$-Linie $\frac{dR_t}{ds} > 0$ oder < -1 sein, aber auch Lim. R_t einen endlichen Werth entsprechend dem Fall $\Omega_{\prime\prime\prime} = 0$ haben kann.


Fig. 20.

Es kann der Fall vorkommen, dass Ω gleich einer der Grössen Φ ist, wobei ein Uebergangstypus zu Kreispunktsformen höherer Ordnung oder zu Linien sphärischer Krümmung vorliegt, dem wir bei der Untersuchung von Flächenelementen mit zwei oder mehreren Kreispunkten wieder begegnen werden. Zu derselben Categorie gehört der Fall $\Omega = 0$, wenn $\Phi_\prime$ und $\Phi_{\prime\prime}$ dasselbe Vorzeichen haben, indem dann $\Phi_{\prime\prime\prime} - \Omega_{\prime\prime\prime} = 0$ ist. Bei $\Phi_\prime = \Omega = 0$ $\Phi_{\prime\prime} \gtrless 0$ kann die $s_\prime$-Linie eine Linie sphärischer Krümmung auf einer Umdrehungsfläche sein.

Für Kreispunkte mit zwei Symmetrieebenen finden wir also drei Typen der Krümmungslinienfigur, einen mit einlaufenden Krümmungslinien der einen Schaar und umkreisenden der anderen, einen zweiten mit ausbiegenden Krümmungslinien und einen dritten mit hindurchgehenden Krümmungslinien beider Schaaren.

Für die nöthige Kenntniss der *Evolute* reichen die angeführten Untersuchungen über die bezüglichen s- und t-Linien nicht völlig aus. Ohne mich hier auf eine eingehende Untersuchung, welche auch die Coordinatenlinien dieser Flächen berücksichtigen müsste, einzulassen, will ich nur an den Werth des Krümmungsmasses der ersten Evolutenschale im allgemeinen Flächenelemente

$$K' = -\frac{W}{U} \cdot \frac{D_\prime^4}{(D_\prime - D_{\prime\prime})^2}$$

erinnern, welcher zwar im Fokalpunkt eines Kreispunktes unendlich gross ist, aber, da er nur durch geometrischen Grössen bestimmt wird, die im Kreispunkte ihre Giltigkeit beibehalten, und da der Krümmungsunterschied $D_\prime - D_{\prime\prime}$ in der zweiten Potenz im Ausdrucke vorkommt, doch sowohl im Fokalpunkte selbst wie in dessen unmittelbarer Nähe

dem Vorzeichen nach das Krümmungsmass der Evolute längs der bezüglichen s-Linie angiebt.

Im Fokalpunkte des Kreispunktes müssen sich die beiden Schalen der Evolute treffen. Das kann so geschehen, dass beide im Fokalpunkte eine Spitze haben und sich gegenseitig in diesen Spitzen berühren, ohne dass eine Schale der Evolute die parallel zur Tangentialebene durch den Krümmungsmittelpunkt gelegte Ebene, *die Fokalebene,* schneidet. In anderen Fällen mögen aber solche Schnittlinien vorkommen. Um diese zu untersuchen, verfahren wir folgendermassen. Wir setzen in den Gleichungen der Normale $\zeta = \frac{1}{r}$ $x = R\cos\vartheta$ $y = R\sin\vartheta$ $\frac{y}{x} = y'$ $\frac{\eta}{\xi} = \eta'$ und erhalten auf diese Weise für $R = 0$ im allgemeinen Falle — Coordinatensystem $p = q = v = 0$ —

$$\eta' = \frac{2wy' + uy'^2}{u + wy'^2}$$

und finden durch Differentiation

$$\frac{d\eta'}{dy'} = \frac{2(uw + uuy' - w^2y'^2)}{(u + wy'^2)^2}$$

Dieser Ausdruck bezieht sich also auf die Curve, längs welcher die Flächennormalen in den Punkten $x^2 + y^2 = R^2$ der Fläche die Fokalebene schneiden. Wenn solche, verschiedenen Werthen von R entsprechende Curven eine einhüllende Curve haben, so müssen die Zweige dieser einhüllenden Curve, da bei $R = 0$ die Curve sich auf einen Punkt, den Krümmungsmittelpunkt, reducirt, durch diesen gehen. In jedem Punkte dieser einhüllenden Curve treffen sich aber zwei Normalen in einander unendlich nahe belegenen Punkten der Fläche. Es resultirt hieraus, dass diese einhüllenden Curven eben die Schnittlinien der Evolute mit der Fokalebene darstellen. Die Bedingung $\frac{d\eta'}{dy'} = 0$ entspricht nun einer vom Fokalpunkt gezogenen Tangente zur bezüglichen Curve und fällt also für $R = 0$ mit der Tangente der einhüllenden Curve im Fokalpunkt zusammen. Die der Bedingung $\frac{d\eta'}{dy'} = 0$ bei $R = 0$ entsprechenden Werthe von η' stellen also die Tangenten der Schnittlinien der Evolute mit der Fokalebene im Fokalpunkte dar.

Die Bedingung dafür, dass die Evolute die Fokalebene schneidet, ist mithin

$$uw + uwy' - w^2 y'^2 = 0$$

d. h.

$$u^2 w^2 + 4w^3 u \geq 0$$

Wir bezeichnen die Wurzeln dieser Gleichung für y' mit $a_, a_{,,}$ und die entsprechenden Werthe von η' mit $c_, c_{,,}$. Indem wir dann die Werthe

$$a_, + a_{,,} = \frac{uw}{w^2} \qquad a_, a_{,,} = -\frac{u}{w} \qquad a_,^2 + a_{,,}^2 = \frac{u^2 w^2}{w^4} + \frac{2u}{w} = \frac{u^2 w^2 + 2w^3 u}{w^4}$$

in den Ausdruck

$$c_, + c_{,,} = \frac{2w a_, + w a_,^2}{u + w a_,^2} + \frac{2w a_{,,} + w a_{,,}^2}{u + w a_{,,}^2}$$

und den entsprechenden für $c_, c_{,,}$ einsetzen, finden wir:

$$c_, + c_{,,} = \frac{w}{w} \qquad c_, c_{,,} = -\frac{w}{u}$$

d. h. für η' die Gleichung

$$uw\eta'^2 - uw\eta' - w^2 = 0$$

und die Identitäten

$$c_, = -\frac{1}{a_{,,}} \qquad c_{,,} = -\frac{1}{a_,}$$

Wir nennen den Winkel, den die in der Fokalebene durch den Fokalpunkt gezogenen Tangenten der Evolute bilden, den Evolutenwinkel und bezeichnen ihn mit ε. Wir haben dann

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{c_, - c_{,,}}{1 + c_, c_{,,}} = \frac{\sqrt{u^2 w^2 + 4w^3 u}}{w(u - w)}$$

Aus diesem Ausdrucke ersehen wir zunächst, dass die Kreispunkte mit zwei orthogonalen Haupttangenten einen rechten Evolutenwinkel haben, wobei die Evolutentangenten in der Fokalebene auch in den Ebenen der orthogonalen Haupttangenten liegen, indem für $w = 0$ und $y' = 0$ auch $\frac{d\eta'}{dy'} = 0$ ist. Weiter finden wir, indem wir uns an die Bedeutung der unter dem Wurzelzeichen stehenden Grösse erinnern,



dass, wenn drei Linien $w = 0$ vorkommen, die Evolute nicht die Fokalebene schneidet, und dass, wenn zwei Linien $w = 0$ existiren, nur eine Schnittlinie zwischen Evolute und Fokalebene existirt, während für Kreispunkte mit nur einer Linie $w = 0$ immer zwei solche Linien existiren, deren Tangenten im Fokalpunkte den Evolutenwinkel bilden. Bei solchen Kreispunkten giebt es aber immer ein Coordinatensystem $p = q = v = 0$, für welches sowohl u als w positive Werthe haben, und folglich ξ in der Fokalebene immer negativ ist. Es folgt hieraus, dass sämmtliche Normalen die Fokalebene innerhalb eines der vier Winkel ε treffen, wonach die Schnittlinien der Evolute mit der Fokalebene nicht den Fokalpunkt überschreiten, sondern in ihm endigen. Der so bestimmte Winkel muss also wenigstens ebenso gross sein als die Summe der zwei kleinsten Winkel ω. Da nun bei $w > u > 0$ diese Summe grösser als $\frac{\pi}{2}$ ist, so folgt daraus, dass der angegebene Werth für $\operatorname{tg} \varepsilon$ auch dem Vorzeichen nach die Grösse des Evolutenwinkels angiebt, während seine Orientirung dadurch bestimmt ist, dass in einem Coordinatensysteme $p = q = v = 0$ bei $u > 0$ und $w > 0$ der negative Theil der X-Achse innerhalb desselben verläuft. Näher wird die Orientirung durch die Bissectrice bestimmt, welche mit der X-Achse in einem solchen Coordinatensystem den Winkel

$$\frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{c_{,} + c_{,,}}{1 - c_{,} c_{,,}} = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{u w}{w(u + w)}$$

bildet. Bei $w_{,} = 0$ ist also die $s_{,}$-Linie Bissectrice des Evolutenwinkels. Dass bei $w_{,} = 0$ die t-Linie der von der XZ-Ebene tangirten abwickelbaren Normalfläche eine Evolutenkante darstellt, geht daraus hervor, dass in einem Coordinatensysteme $p = q = v = w = 0$ die XZ-Ebene eine Symmetrieebene bildet.

Bei der Beschreibung der Evolute gehen wir daher der Einfachkeit wegen von einem solchen Coordinatensystem aus, wobei wir $u_{,} > 0$ wählen und die Krümmungslinienschaar, welcher der positive Theil der $s_{,}$-Linie angehört, als die erste bezeichnen. Die erste Evolutenschale ist also diejenige, deren geodätische Linien von den Normalen längs den Krümmungslinien der ersten Schaar tangirt werden.

Wenn nur eine Krümmungslinie in den Kreispunkt eintritt, haben wir $u > 2w > 0$, und der Durchschnitt der ersten Evolutenschale mit der XZ-Ebene CFG Fig. 1 S. 76 zeigt zwischen Fläche und Fokalpunkt eine positiv gekrümmte, ganz auf der Seite positiver X der Kreis-

punktsnormale belegene Linie, die bezügliche Hälfte der s-Linie der abwickelbaren Normalfläche, jenseits des Fokalpunktes eine negativ gekrümmte, auf der Seite negativer X der Kreispunktsnormale belegene Linie — die entsprechende Hälfte der t-Linie der abwickelbaren Normalfläche. Da das Krümmungsmass längs der s-Linie negativ ist, so zeigen parallel zur Tangentialebene gelegte Schnitte zwischen Fläche und Fokalpunkt eine Linie, welche die XZ-Ebene auf der Seite positiver X der Kreispunktsnormale schneidet, wobei ihre Tangente auf dieser Ebene senkrecht steht, und ihre Krümmung negativ ist. Je näher dem Fokalpunkte, desto grösser wird die Krümmung, bis im Fokalpunkte selbst eine Spitze entsteht mit zwei Tangenten, welche den Evolutenwinkel einschliessen, der nicht die Grösse $\operatorname{arc} \operatorname{tg} 2\sqrt{2}$ erreicht. Jenseits des Fokalpunkts bilden die Schnittlinien Spitzen, welche nach der Richtung positiver X schauen, und deren Tangenten in der XZ-Ebene liegen. Die geodätische Linie, welche einer durch einen Punkt $x > 0$ $\Delta y > 0$ verlaufenden Krümmungslinie der ersten Schaar entspricht, geht mit positivem Werthe von η durch die Fokalebene und erreicht die Kante in dem Augenblicke, wo ihre osculirende Ebene zur YZ-Ebene parallel ist. Die zweite Evolutenschale verhält sich ganz ähnlich, nur liegt die Kante zwischen Fläche und Fokalebene, und der jenseits dieser belegene Theil hat ein negatives Krümmungsmass. Es schneiden sich also beide Evolutenschalen beim Durchgang durch die Fokalebene, und ihre Schnittlinien werden im Fokalpunkte von den beiden Schenkeln des Evolutenwinkels tangirt.

Im Falle $2w > u > 0$ existiren drei Haupttangenten, und der Evolutenwinkel ist bei $u = 0$ grösser als $\operatorname{arc} \operatorname{tg} 2\sqrt{2}$, aber kleiner als $\frac{\pi}{2}$. Die Kantlinie hat hierbei eine positive Krümmung, und das Krümmungsmass der Evolute auf beiden Seiten der Kantlinie ist positiv. Die den anschmiegenden Krümmungslinien der ersten Schaar entsprechenden geodätischen Linien der ersten Evolutenschale laufen in den Fokalpunkt hinein. Die t-Linien der abwickelbaren $s_{\prime\prime}$- und $s_{\prime\prime\prime}$-Flächen haben negative Krümmung, weil für diese Linien $u > 2w > 0$ ist; zwischen ihnen und der Kantlinie strahlen vom Fokalpunkt die t-Linien aus, welche den bezüglichen anschmiegenden Krümmungslinien entsprechen. In diesem Falle, wie im vorigen, liegt der Berührungspunkt einer beliebigen Normale mit der ersten Schale der Fläche näher als der Berührungspunkt mit der zweiten Schale.

Wenn $w > u > 0$ ist, so zeigen die Krümmungslinien den ausbiegenden Typus, die Normalen berühren zuerst die zweite Schale, und der Evolutenwinkel ist grösser als $\frac{\pi}{2}$. Die beiden Evolutenschalen werden, wie im vorigen Falle, durch die Kantlinien und die beiden Tangenten ihrer Schnittlinien mit der Fokalebene in je drei Felder getheilt, von denen das eine negatives, die beiden übrigen positives Krümmungsmass haben. Von der ersten Schale liegt das Feld mit negativem Krümmungsmass zwischen Fläche und Fokalebene. Auf jedem Felde geht eine geodätische Linie in den Fokalpunkt hinein, entsprechend den drei Krümmungslinien der bezüglichen Schaar, welche im Kreispunkt endigen. Eine Krümmungslinie der ersten Schaar, welche durch einen Punkt $x > 0$ $\varDelta y > 0$ geht, biegt bekanntlich nach der Richtung $x < 0$ $y > 0$ aus, ohne die XZ-Ebene zu schneiden. Die entsprechende geodätische Linie der ersten Schale beginnt in einem Punkte $\xi > 0$ $\varDelta \eta < 0$ $\zeta < \varrho$, geht durch einen Punkt $\varDelta \xi < 0$ $\varDelta \eta < 0$ $\zeta = \varrho$ und biegt nach der Richtnng $\xi > 0$ $\eta < 0$ $\zeta > \varrho$ aus. Wenn man sich erinnert, dass die Normalen, wie es die Fig. 2, S. 78 darstellt, die Kante der ersten Evolutenschale von der scharfen Seite her treffen, so ist auch der Verlauf der geodätischen Linien, welche den der ersten Schaar angehörigen Krümmungslinien entsprechen, die den negativen Theil der $s_{,}$-Linie rechtwinkelig schneiden, leicht zu verstehen. In Uebereinstimmung mit dem positiven Werthe des Krümmungsmasses der Evolutenfelder, auf welchen die den $s_{,,}$- und $s_{,,,}$-Linien entsprechenden geodätischen Linien verlaufen, ist, wie schon oben bewiesen worden $u_{,,}w_{,,} < 0$ $u_{,,,}w_{,,,} < 0$. Die t-Linien der abwickelbaren $s_{,,}$- und $s_{,,,}$-Flächen verlaufen auf den convex-convexen Feldern der bezüglichen Evolutenschale, so dass z. B. eine Normale, welche eine in den Fokalpunkt eintretende geodätische Linie der zweiten Evolutenschale zwischen Fläche und Fokalebene berührt, jenseits der Fokalebene nach dem Schema der Fig. 3 S. 78 das entsprechende convex-convexe Feld der ersten Schale tangirt.

Im Falle $u_{,} = w_{,}$ hängt es, wie wir gesehen haben, sobald auch $\Phi_{,} = \Omega_{,}$ ist, von dem Werthe $\frac{d\Phi_{,} - d\Omega_{,}}{ds_{,}}$ ab, ob die Krümmungsliniefigur den umbiegenden oder den ausbiegenden Typus aufweist. Hierbei zeigen die Evoluten dieselbe Anordnung wie die zwei zuletzt untersuchten Fälle. Nur ist der Evolutenwinkel ein rechter, und es haben in Uebereinstimmung hiermit die t-Linien der abwickelbaren $s_{,,}$- und

$s_{,,,}$-Flächen den in der Fig. 4 S. 78 dargestellten Verlauf. Ist aber bei $w_, > 0$ auch $\Phi_, > \Omega_,$, so ist die Krümmungslinienfigur vom Typus der Fig. 16 S. 90, und es geht die $s_,$-Linie durch den Kreispunkt hindurch. In Uebereinstimmung hiermit ist die erste Evolutenschale ohne Kante und hat überall ein negatives Krümmungsmass, welches im Fokalpunkte unendlich gross ist, so dass hier der Evolutenwinkel wie gewöhnlich gebildet wird. Dagegen zeigt die zweite Schale sowohl zwischen Fläche und Fokalebene wie jenseits dieser eine Kante, deren scharfe Seite von den Normalen getroffen wird, da diese immer zuerst die erste Evolutenschale treffen. Die geodätischen Linien beider Blätter sind leicht zu construiren; man erinnere sich nur, dass die Kantlinie jenseits der Fokalebene den Typus der Fig. 2 S. 78 zeigt.

Die Kreispunkte, für deren Coordinatensysteme $p = q = v = 0$ die Bedingung $u^2 w^2 + 4w^3 u = 0$ erfüllt ist, haben, wie wir wissen, $u_, = 0$. Hier ist der Evolutenwinkel gleich π. Im übrigen unterscheidet sich die Anordnung der Evolute von dem Falle $w_, > u_, > 0$ nur dadurch, dass die eine Evolutenschale eine in der Fokalebene liegende, mit der Y-Achse parallele Kante hat und längs dieser umgebogen ist, so dass bei $\Phi_, > 0$ die zweite Schale ganz zwischen Fläche und Fokalebene zu finden ist, wohingegen bei $\Phi_, < 0$ die erste Schale umgebogen ist und ganz jenseits der Fokalebene liegt. Der erste Fall ist in der Fig. 5 S. 79 dargestellt, wo CFG die Schnittlinie der ersten Schale mit der XZ-Ebene, EFD die der zweiten repräsentirt.

Nachdem wir nun mit Ausnahme des später zu berücksichtigenden Falles $u_, = w_, = 0$ die Fälle untersucht haben, in welchen die Evolute eine Schnittlinie mit der Fokalebene besitzt, bleibt nur der Fall $u^2 w^2 + 4w^3 u > 0$ zurück. Wie wir wissen, ist hier für alle drei Haupttangenten $uw < 0$, das Krümmungsmass der Evolute mithin überall positiv, und es existiren drei Linien $w = 0$, welche eventuell mit den Haupttangenten zusammenfallen können, mithin ebenso viele Kanten repräsentiren müssen. Die Evolute besteht demnach aus zwei dreieckigen Trichtern, welche sich mit ihren Spitzen im Fokalpunkte berühren, und von denen der eine ganz zwischen Fläche und Fokalebene, der andere jenseits dieser sich befindet. Im Falle $w = 0$ $u > 0 > w$ ist in der Fig. 3 S. 78 CFG Durchschnitt der ersten Schale, EFD der zweiten; FG und FE sind Kanten. Die Krümmungslinienfigur zeigt den ausbiegenden Typus, und die geodätischen Linien auf der Evolute ergeben sich von selbst.

Bei dieser Untersuchung haben wir in allen Fällen $u_{,} = 0$ supponirt. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so bringt das nur insofern eine Aenderung mit sich, als die osculirenden Ebenen der Kantlinien nicht mit den bezüglichen Haupttangentenebenen zusammenfallen. Im übrigen bleibt die Anordnung der Evoluten unverändert.

Wir gehen nun zur Untersuchung der Evoluten derjenigen Flächenelemente über, welche Kreispunkte enthalten, für die sämmtliche Differentialquotienten dritter Ordnung der Flächengleichung im Coordinatensystem $p = q = 0$ verschwinden, und beschränken uns dabei, wie bei der Untersuchung der Krümmungsliniencfigur auf solche, die zwei Symmetrieebenen haben, und für welche mithin ein Coordinatensystem $p = q = \partial^{31} = \partial^{13} = 0$ existirt. In einem solchen Coordinatensystem finden wir nach derselben Methode wie oben:

$$\eta' = \frac{3\Omega y' + \Phi_{,,} y'^3}{\Phi_{,} + 3\Omega y'^2}$$

$$\frac{d\eta'}{dy'} = \frac{3\{\Phi_{,,}\Omega y'^4 + (\Phi_{,}\Phi_{,,} - 3\Omega^2) y'^2 + \Phi_{,}\Omega\}}{(\Phi_{,} + 3\Omega y'^2)^2} .$$

Die Bedingung $\frac{d\eta'}{dy'} = 0$ fordert also erstens:

$$(\Phi_{,}\Phi_{,,} - 3\Omega^2)^2 - 4\Phi_{,}\Phi_{,,}\Omega^2 \geqq 0$$

d. h.

$$(\Phi_{,}\Phi_{,,} - \Omega^2)(\Phi_{,}\Phi_{,,} - 9\Omega^2) \geqq 0$$

wobei sich ergiebt:

$$y'^2 = \frac{3\Omega^2 - \Phi_{,}\Phi_{,,} \pm \sqrt{(\Phi_{,}\Phi_{,,} - \Omega^2)(\Phi_{,}\Phi_{,,} - 9\Omega^2)}}{2\Phi_{,,}\Omega} .$$

Dieser Ausdruck lehrt, dass, wenn $\Phi_{,}$ und $\Phi_{,,}$ verschiedenes Vorzeichen haben, für y'^2 immer ein positiver und ein negativer Werth erhalten wird, so dass immer zwei symmetrische Schnittlinien der Evolute mit der Fokalebene existiren. Wenn alle drei Grössen dasselbe Vorzeichen haben, muss $\Omega^2 \geqq \Phi_{,}\Phi_{,,}$ sein, wobei vier bezw. zwei durchschnittslinien vorhanden sind. Haben endlich $\Phi_{,}$ und $\Phi_{,,}$ dasselbe, Ω aber entgegengesetztes Vorzeichen, so muss die Bedingung $\Phi_{,}\Phi_{,,} \geqq 9\Omega^2$ erfüllt sein, wenn Schnittlinien der Evolute mit der Fokalebene vorhanden sein sollen, und wir finden dabei wieder vier bezw. zwei

dieser Linien, welche immer paarweise symmetrisch zu den orthogonalen Haupttangenten verlaufen.

Aus dem allgemeinen Ausdruck für das Krümmungsmass der ersten Evolutenschale

$$K' = -\frac{W}{U} \cdot \frac{D_{,}^{4}}{(D_{,} - D_{,,})^{2}}$$

welcher für $U = W = 0$ die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, erhalten wir durch Differentiation von Zähler und Nenner nach s, allgemein

$$K' = -\frac{\Omega''}{\Phi'} \cdot \frac{D_{,}^{4}}{(D_{,} - D_{,,})^{2}}$$

woraus sich für einen Kreispunkt $u = w = 0$ ergiebt, dass das Krümmungsmass der Evolute längs der bezüglichen s-Linie entgegengesetztes Vorzeichen gegenüber $\frac{\Omega}{\Phi}$ hat.

Wenn wir nun zu der speciellen Untersuchung der Evoluten übergehen, so finden wir zunächst in den Fällen $\Omega(\Phi_{,} - \Omega) > 0$ $\Omega(\Phi_{,,} - \Omega) > 0$, in welchen die Krümmungslinien der ersten Schaar in den Kreispunkt eintreten und die der zweiten Schaar den Kreispunkt umkreisen, dass keine Schnittlinie der Evolute mit der Fokalebene existirt. Beide Schalen bestehen demnach aus geschlossenen Trichtern, der erste ohne Kanten, der zweite mit so vielen, als es Haupttangenten giebt. Beide Trichter liegen auf derselben Seite der Fokalebene und zwar bei positivem Werthe der Grössen Φ und Ω zwischen dieser und der Fläche. Die entsprechend den Krümmungslinienfiguren Figg. 17 u. 18 S. 93 resultirende Anordnung der Kanten der zweiten Evolutenschale ist schematisch in der Fig. 21 durch einen parallel zur Tangentialebene gelegten Schnitt der beiden Trichter dargestellt. Da für jede zweite Haupttangente $\Phi - 3\Omega$ das Vorzeichen wechselt, und bei $\Phi - 3\,\Omega > 0$ auch $\Phi - 4\,\Omega > 0$ sein kann, wobei die betreffenden s- und t-Linien der abwickelbaren fläche den in der Fig. 7 S. 79 dargestellten Verlaufstypus zeigen, so entstehen auf diese Weise die angedeuteten Schnittlinien zwischen den beiden Evolutenschalen. Die osculirenden Ebenen der Kanten fallen nur bezüglich der orthogonalen Krümmungslinien mit den Haupttangenten-

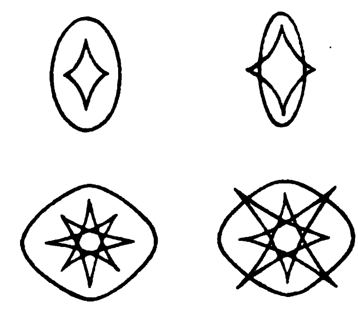


Fig. 21.

ebenen zusammen, indem für die $s_{\prime\prime\prime}$-Linien ∂^{13} nur dann verschwindet, wenn $\Phi_{\prime} = \Phi_{\prime\prime}$ und $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ ist. Im Falle $\Phi_{\prime} = \Phi_{\prime\prime} = 3\Omega$ wird der Durchschnitt der ersten Schale bis auf Ableitungen höherer Ordnung kreisförmig, und die zweite degenerirt zu einer Linie, welche mit der Kreispunktsnormale zusammenfällt, oder aber weist eine von den Ableitungen höherer Ordnung abhängige Anzahl Kanten auf, welche abwechselnd nach entgegengesetzten Richtungen schauen.

Wenn nämlich eine Berührung m-ter Ordnung mit dem Scheitelsegmente einer Umdrehungsfläche besteht, so muss der Differentialquotiont $\frac{\partial^n z}{\partial x^n}$ bei $n \leqq m$ keine Aenderung durch eine Drehung des Coordinatensystemes um die Z-Achse herum erfahren. Für eine solche Drehung erhalten wir mittels des Binomialtheoremes allgemein:

$$\frac{\partial^n \zeta}{\partial \xi^n} = \cos^n \vartheta \frac{\partial^n z}{\partial x^n} + n \cos^{n-1} \vartheta \sin \vartheta \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial y} + \\ + \frac{n(n-1)}{2} \cos^{n-2} \vartheta \sin^2 \vartheta \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2} \partial y^2} + \cdots\cdots$$

und für $\vartheta = 0$:

$$\frac{d^2}{d\vartheta_2} \frac{\partial^n \zeta}{\partial \xi^n} = -n \left\{ \frac{\partial^n z}{\partial x^n} - (n-1) \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2} \partial y^2} \right\}$$

wonach für die fragliche Berührung

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n} = (n-1) \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2} \partial y^2}$$

bei $n \leqq m$ ist. Wenn aber $n = m + 1$ ist, so ist $\frac{\partial^n z}{\partial x^n}$ der erste Differentialquotient von z, welcher von der Drehung des Coordinatensystemes abhängig ist, und es sind mithin $\frac{d^{n-2} D_{\prime}}{d s^{n-2}}$ bezw. $\frac{d^{n-2} D_{\prime\prime}}{d s^{n-2}}$ die ersten Differentialquotienten der Hauptkrümmungen, welche für verschiedene s-Linien verschiedene Werthe haben. Diese enthalten nämlich, wie durch Differentiation der allgemeinen Werthe für die Hauptkrümmungen bewiesen wird, ausser den genannten Differentialquotienten von z nur solche niederer Ordnung. Wenn also in einem beliebigen Coordinatensysteme $p = q = 0$ $\frac{\partial^n z}{\partial x^n} \gtrless (n-1) \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2} \partial y^2}$ ist, so fällt nicht der einem in der XZ-Ebene liegenden Flächenpunkte entsprechende

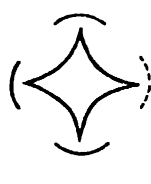
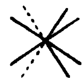
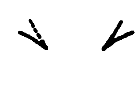
zweite Fokalpunkt auf die Z-Achse, sondern muss, da $\frac{d^{n-2}\varrho_t}{ds^{n-2}}$ den Werth $-\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2}\,\partial y^2}$ enthält, bei $\frac{d^2}{d\vartheta^2}\frac{\partial^n \zeta}{\partial \xi^n} > 0$ auf derselben Seite dieser Achse wie der entsprechende Flächenpunkt liegen und vice versa. In einem Kreispunkte kann m nicht kleiner als 2 sein, und es fällt, wie wir gesehen haben, immer eine Haupttangente mit der XZ-Ebene zusammen, wenn in einem Coordinatensysteme $p = q = 0$ $\frac{d}{d\vartheta}\frac{\partial^n z}{\partial x^n} = 0$ bei $n = m + 1$ ist. Wenn wir also mit ϱ und ds Krümmungshalbmesser und Bogenelement eines Normalschnittes bezeichnen, können wir den allgemeinen Satz aussprechen: In einem Kreispunkte, in welchem die Fläche eine vollständige Berührung n-ter Ordnung mit einer Umdrehungsfläche hat, liegt die t-Linie der abwickelbaren Normalfläche, welche in einer Richtung $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\frac{1}{\varrho} = 0$ durch den Kreispunkt geht, auf derselben Seite der Kreispunktsnormale wie der entsprechende Theil der s-Linie auf der Fläche, wenn $\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\frac{1}{\varrho}$ als Funktion von ϑ ein Minimum hat, auf der entgegengesetzten, wenn ein Maximum vorliegt.

Wenn $n \geqq 4$ ist, so treten Krümmungslinien von allen Richtungen her in den Kreispunkt ein, und die Lage der t-Linie der abwickelbaren Normalfläche wird einfach durch das Vorzeichen der Differenz $\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n+1}} - n\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n-1}\partial y^2}$ für das entsprechende Coordinatensystem $p = q = 0$ bestimmt, wonach ebenso viele Kanten vorhanden sind wie Coordinatensysteme $p = q = 0$, in welchen diese Differenz gleich Null ist und bei fortwährender Drehung das Vorzeichen wechselt.

Von den Fällen mit ausbiegenden Krümmungslinien, in welchen gleichzeitig $\Omega(\Phi_{,} - \Omega) < 0$ $\Omega(\Phi_{,,} - \Omega) < 0$ ist, wenden wir uns zuerst denjenigen zu, in welchen $\Phi_{,}$ und $\Phi_{,,}$ dasselbe, Ω aber entgegengesetztes Vorzeichen hat. Wie wir gesehen haben, giebt es bei $9\Omega^2 > \Phi_{,}\Phi_{,,}$ keine Schnittlinie der Evolute mit der Fokalebene. Diese Bedingung ist aber damit gleichbedeutend, dass $\Phi_{,,,}$ dasselbe Vorzeichen wie Ω hat. Da nun immer $\Omega_{,,,}$ bei diesem Typus entgegengesetztes Vorzeichen gegenüber Ω hat, so finden wir, dass bei $\Omega \gtrless 0 \gtrless \Phi_{,}$ $0 \gtrless \Phi_{,,}$ $9\Omega^2 > \Phi_{,}\Phi_{,,}$ zwischen jeder Haupttangente sowohl Φ als Ω das Vorzeichen wechseln, und das Krümmungsmass überall positiv ist. Entsprechend dem eben beschriebenen Fall, wo die Evolute aus zwei

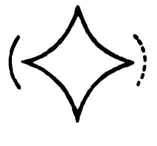
dreieckigen Trichtern besteht, finden wir hier zwei geschlossene viereckige Trichter, den einen zwischen Fläche und Fokalebene, den anderen jenseits dieser. Während aber im ersten Falle die Kanten beider Schalen ähnlich orientirt waren, so liegt hier ein anderes Verhältniss vor. Wenn wir z. B. $\Omega > 0$ wählen, wobei die zweite Schale zwischen Fläche und Fokalebene belegen ist, so fallen ihre Kanten in die XZ- und YZ-Ebenen, während die Kanten der ersten, jenseits der Fokalebene belegenen Schale, zwischen diesen Ebenen belegen sind, ohne mit den $s_{\prime\prime\prime}$-Ebenen zusammenfallen, sofern nicht $\Phi_{\prime} = \Phi_{\prime\prime}$ ist, wobei sie diagonal zwischen den XZ- und YZ-Ebenen orientirt sind.

Sämmtliche Evolutenformen bei dem ausbiegenden Krümmungslinientypus zeigen einen dieser viereckigen Trichter unverändert, während von dem anderen ein grösserer oder kleinerer Theil umgebogen ist. So finden wir, dass bei $\Omega \gtrless 0 \gtrless \Phi_{\prime}$ $0 \gtrless \Phi_{\prime\prime}$ $\Phi_{\prime}\Phi_{\prime\prime} > 9\Omega^2$, sowie wenn sämmtliche Grössen dasselbe Vorzeichen haben, für sämmtliche Haupttangenten Φ dasselbe Vorzeichen hat, während Ω zwischen je zwei von ihnen das Vorzeichen wechselt, und gleichzeitig die Bedingung für vier Schnittlinien der Evolute mit der Fokalebene gegeben ist. Hierbei sind von dem einen Trichter alle vier Seiten durch die Fokalebene hindurch umgebogen, wobei sie negatives Krümmungsmass erhalten, während die vier Kanten stehen geblieben sind, aber nach der Kreispunktsnormale zu schauen. Ist z. B. $\Omega > \Phi_{\prime} > 0$ $\Omega > \Phi_{\prime\prime} > 0$, finden wir $\Phi_{\prime\prime\prime} > 0$ und $\Omega_{\prime\prime\prime} < 0$, und die zweite Evolutenschale bildet einen viereckigen Trichter zwischen Fläche und Fokalebene, während die erste aus vier Blättern mit negativem Krümmungsmass besteht, welche zwischen Fläche und Fokalebene getrennt sind, und letztere unter Bildung von vier in dem Fokalpunkte zusammenfallenden Spitzen, die zusammen vier Tangenten haben, schneidet, um jenseits der Fokalebene in vier Kanten zusammenzulaufen. Die Fig. 22 giebt ein Schema von dieser Anordnung. Das eine Blatt der ersten Evolutenschale ist in den drei Figuren mit punktirten Strichen gezeichnet, um den nicht so leicht zu verstehenden Zusammenhang der verschiedenen Blätter zu demonstriren. Die s- und t-Linien der abwickelbaren $s_{\prime}$- und $s_{\prime\prime}$-Flächen sind nach dem Typus der Fig. 8 S. 80 angeordnet, die der abwickelbaren $s_{\prime\prime\prime}$-Flächen nach dem Typus der Fig. 9. Die Kanten schauen also von der Fläche weg und nach der Kreispunktsnormale zu. Die geodätische Linie, welche einer durch einen Punkt $x > 0$ $\Delta y > 0$ gehenden, am Kreispunkte ausbiegenden, dann




Fig. 22.

durch einen Punkt $\Delta x > 0 \quad y > 0$ wegziehenden Krümmungslinie der ersten Schaar entspricht, beginnt auf der ersten Schale in einem Punkte $\xi > 0 \quad \Delta\eta < 0 \quad \zeta < \varrho$, geht durch die Fokalebene in einem Punkte $\Delta\xi < 0 \quad \Delta\eta < 0$, (in der Fig. 22 auf der mit punktirtem Striche gezeichneten Linie zu finden), passirt die Kante in einem Punkte $\Delta\xi < 0$ $\Delta\eta < 0 \quad \zeta > \varrho$, geht wieder durch die Fokalebene in einem Punkte $\Delta\xi < 0 \quad \Delta\eta < 0$ (in der Fig. 22 auf der bezüglichen nicht mit punktirtem Striche gezeichneten Linie belegen), um schliesslich durch einen Punkt $\Delta\xi < 0 \quad \eta > 0 \quad \zeta < \varrho$ wegzuziehen. Es haben also auch die jenseits der Fokalebene belegenen Theile der ersten Schale negatives Krümmungsmass. Im Grenzfalle $\Omega^2 = \Phi_{,}\Phi_{,,}$ ist $\Phi_{,} = \Phi_{,,} = \Omega$ und $\Omega_{,,,} = 0$, die Kantlinien sind in der Fokalebene belegen und bilden die zwei sich im Fokalpunkte kreuzenden Schnittlinien der Evolute mit der Fokalebene, entsprechend den zwei Wurzeln der Gleichung $\frac{d\eta'}{dy'} = 0$. Ähnlich ist der Fall $\Omega = 0$, wobei $\Phi_{,,,} = \Omega_{,,,}$ ist und dasselbe Vorzeichen hat wie $\Phi_{,}$ und $\Phi_{,,}$. Auch der Grenzfall $\Phi_{,}\Phi_{,,} = 9\,\Omega^2$ bei $\Omega \gtrless 0 \gtrless \Phi_{,}$ $0 \gtrless \Phi_{,,}$ liefert nur zwei Schnittlinien zwischen Evolute und Fokalebene. Da aber hierbei $\Phi_{,,,} = 0$ ist, so kann die Evolute nicht vollständig ohne Zuhilfenahme von Differentialquotienten höherer Ordnung als der vierten in der Flächengleichung untersucht werden. Das Gleiche gilt von den Specialfällen $\Phi_{,} = 0$ und $\Phi_{,,} = 0$.

In den diesem Typus zugehörigen Fällen $\Phi_{,}\Phi_{,,} < 0$ hat $\Phi_{,,,}$ dasselbe Vorzeichen wie Ω, wonach die zweite Evolutenschale einen geschlossenen viereckigen Trichter bildet. Von der ersten sind zwei Seiten des Trichters durch die Fokalebene hindurch umgebogen, wobei die Kanten verloren gehen, und auf der einen Seite der Fokalebene zwei Blätter mit negativem Krümmungsmass, auf der anderen zwei mit positivem entstehen, wie es die Fig. 23 für den Fall $\Omega > \Phi_{,} > 0 > \Phi_{,,}$ veranschaulicht. Die geodätishe Linie des eben angeführten Beispieles geht in diesem Falle von einem Punkte $\xi > 0 \quad d\eta < 0 \quad \zeta < \varrho$ durch einen Punkt $d\xi < 0 \quad \Delta\eta < 0$ in der Fokalebene, um dann durch einen Punkt $\Delta\xi < 0$ $\eta < 0 \quad \zeta > \varrho$ wegzuziehen.



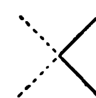




Fig. 23.

Die Kreispunkte mit vorbeigehendem Krümmungslinientypus haben $\Phi_{,} \gtrless \Omega \gtrless \Phi_{,,}$ und besitzen, wenn $\Phi_{,}, \Phi_{,,}$ dasselbe Vorzeichen haben, und dabei $\Phi_{,}\Phi_{,,} > \Omega^2$ ist, Evoluten, welche die Fokalebene nicht schneiden. Es können hierbei zwei oder vier Haupttangenten

vorkommen. Im letzten Falle hat nicht nur $\Phi_{,,,}$, sondern auch $\Omega_{,,,}$ dasselbe Vorzeichen wie die übrigen Grössen $\Phi\,\Omega$. Aus $\Phi_{,}\Phi_{,,} > \Omega^2$ folgt nämlich:

$$(\Phi_{,} + \Phi_{,,})^2 - 4\,\Omega^2 > (\Phi_{,} + \Phi_{,,})^2 - 4\,\Phi_{,}\Phi_{,,}$$

d. h.

$$(\Phi_{,} + \Phi_{,,} - 2\,\Omega)\,(\Phi_{,} + \Phi_{,,} + 2\,\Omega) > (\Phi_{,} - \Phi_{,,})^2 > 0$$

wonach $\Phi_{,} + \Phi_{,,} - 2\,\Omega$ und damit auch $\Omega_{,,,}$[1] eben dasselbe Vorzeichen haben muss. Für den Fall $3\,\Omega > \Phi_{,} > \Omega > \Phi_{,,} > 0 \quad \Phi_{,}\Phi_{,,} > \Omega^2$ ist ein schematischer Durchschnitt der auf einer und derselben Seite von der Fokalebene belegenen Evolutentrichtern in der Fig. 24 *A* dargestellt. Die *s*- und *t*-Linien der abwickelbaren $s_{,}$-Fläche verlaufen nach dem Typus der Fig. 6 S. 79, die der $s_{,,}$-Fläche nach dem der Fig. 8. Die erste Schale, welche zuerst von den Normalen berührt wird, hat längs ihrer Schnittlinie mit der *XZ*-Ebene negatives, aber in der Nähe von der in die *YZ*-Ebene fallenden nach der Fokalebene zu schauenden Kante beiderseits von dieser positives Krümmungsmass. Ihre geodätischen Linien strahlen zwischen den $s_{,}$- und $s_{,,,}$-Linien in den Fokalpunkt ein. Jenseits dieser gehen sie unter Kreuzung der Kante durch die *YZ*-Ebene, wobei $\Delta\eta \gtrless 0$ ist, je nachdem für die entsprechende Krümmungslinie beim Durchgang durch die *YZ*-Ebene $\Delta y \gtrless 0$ ist.

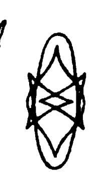


Fig. 24.

Auf der zweiten Schale geht eine geodätische Linie, welche einer von einem Punkte $\Delta x > 0 \quad y < 0$ zu einem Punkte $\Delta x > 0 \quad y > 0$ verlaufenden Krümmungslinie entspricht, von einem Punkte $d\xi < 0 \quad \eta < 0$ zu einem Punkte $\Delta\xi < 0 \quad \Delta\eta > 0$ auf der entsprechenden Kante, dann zu einem Punkte $\Delta\xi > 0 \quad \eta = 0$ auf der in der *XZ*-Ebene belegenen Kante, weiter zu einem Punkt $\Delta\xi < 0 \quad \Delta\eta < 0$ auf der bezüglichen Kante, um schliesslich durch einen Punkt $\Delta\xi < 0 \quad \eta > 0$ wegzuziehen. Die *t*-Linien der abwickelbaren $s_{,,,}$-Flächen fallen nicht mit den bezüglichen Kanten zusammen, sondern liegen auf den zwischen den zwei Kanten eingeschlossenen Flächenstücken. Zwischen ihnen und den in der *XZ*-Ebene liegenden Kanten strahlen die *t*-Linien aus, welche den längs der $s_{,}$-Linie einlaufenden Krümmungslinien entsprechen. Auch bei Vorhandensein von nur zwei Haupttangenten existiren ebenso viele Kanten auf der zweiten Schale. Da nämlich für die $s_{,}$-Linie R_t als Funktion von *t* numerisch ein Minimum ist, so muss die betreffende Kante nach

[1] Siehe S. 92 ! $\Omega_{,,,} = \Omega(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)^2 + (\Phi_{,} + \Phi_{,,} - 2\,\Omega)\cos^2\vartheta \sin^2\vartheta$.

der fraglichen Richtung der $s_{,}$-Linie schauen, wobei der Zusammenhang mit den übrigen Theilen der Schale nur durch die übrigen Kanten vermittelt werden kann. Der einzige Unterschied ist also, dass die in der Fig. 24 *A* innerhalb der ersten Schale gezeichneten Kanten nicht die Mittellinie überschreiten, sondern gegen einander schauen. Ja bei $\Phi_{,} > 4\,\Omega > \Omega > \Phi_{,,} > 0$ entsteht sogar der in der Fig. 24 *B* dargestellte Typus, wobei alle drei Kanten ausserhalb der ersten Schale liegen, indem die t-Linie der abwickelbaren $s_{,}$-Fläche nach dem Schema der Fig. 7 S. 79 verläuft. Nur aus der Existenz aller drei Kanten auch bei Vorhanddnsein von nur zwei Haupttangenten ist es erklärlich, dass bei $\Omega^2 \geqq \Phi_{,}\Phi_{,,}$ (was ebensowohl bei zwei als bei vier Haupttangenten vorkommen kann) die Evolute zwei bezw. vier Schnittlinien mit der Fokalebene hat, indem die vier symmetrischen nicht in den Coordinatenebenen verlaufenden Kanten in der Fokalebene liegen bezw. durch diese hindurch umgebogen sind. Letzterer Fall ist bei Vorhandensein von vier Haupttangenten in der Fig. 25 dargestellt. Der Verlauf der geodätischen Linien bleibt analog, indem die umgebogenen Kanten von der Fokalebene ab und nach der Kreispunktsnormale zu schauen. Es kann hierbei $\Omega_{,,,} \gtreqless 0$ sein, was auf die Form der Evolute ohne Einfluss ist.



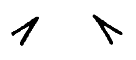
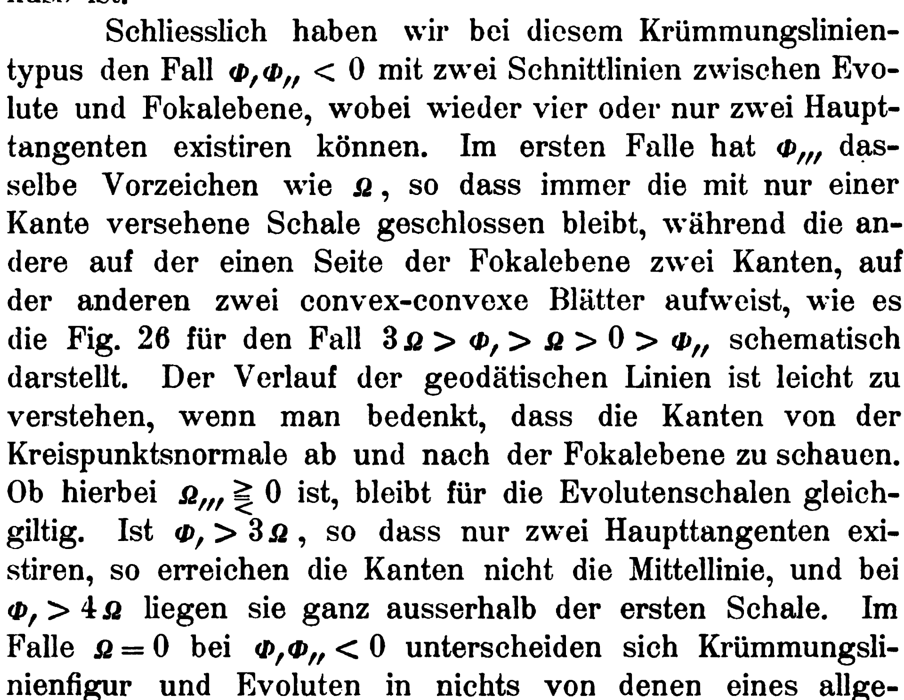



Fig. 25.



Schliesslich haben wir bei diesem Krümmungslinientypus den Fall $\Phi_{,}\Phi_{,,} < 0$ mit zwei Schnittlinien zwischen Evolute und Fokalebene, wobei wieder vier oder nur zwei Haupttangenten existiren können. Im ersten Falle hat $\Phi_{,,,}$ dasselbe Vorzeichen wie Ω, so dass immer die mit nur einer Kante versehene Schale geschlossen bleibt, während die andere auf der einen Seite der Fokalebene zwei Kanten, auf der anderen zwei convex-convexe Blätter aufweist, wie es die Fig. 26 für den Fall $3\,\Omega > \Phi_{,} > \Omega > 0 > \Phi_{,,}$ schematisch darstellt. Der Verlauf der geodätischen Linien ist leicht zu verstehen, wenn man bedenkt, dass die Kanten von der Kreispunktsnormale ab und nach der Fokalebene zu schauen. Ob hierbei $\Omega_{,,,} \gtreqless 0$ ist, bleibt für die Evolutenschalen gleichgiltig. Ist $\Phi_{,} > 3\,\Omega$, so dass nur zwei Haupttangenten existiren, so erreichen die Kanten nicht die Mittellinie, und bei $\Phi_{,} > 4\,\Omega$ liegen sie ganz ausserhalb der ersten Schale. Im Falle $\Omega = 0$ bei $\Phi_{,}\Phi_{,,} < 0$ unterscheiden sich Krümmungslinienfigur und Evoluten in nichts von denen eines allge-

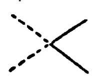




Fig. 26.

meinen Flächenpunktes, indem sich einfach die zwei Evolutenkanten im Fokalpunkte kreuzen, wobei ihre Tangenten zu den Coordinatenachsen parallel sind.

Die wichtigsten Ergebnisse dieser Untersuchung über die Kreispunkte der Flächen können in folgendem Résumé zusammengefasst werden.

Allgemeine Kreispunkte. Die Differentialquotienten dritter Ordnung in der Flächengleichung verschwinden nicht sämmtlich im Coordinatensystem $p = q = 0$.

I *Umbiegende Krümmungslinien.* In den Coordinatensystemen $p = q = v = 0$ ist $w(u - w) > 0$. Die zwei Evolutenschalen sind offen und haben eine Kante, welche im Fokalpunkte endigt. Sie schneiden sich beim Durchgang durch die Fokalebene, wobei ihre in dieser belegenen Tangenten einen Evolutenwinkel kleiner als $\frac{\pi}{2}$ bilden. Sämmtliche Haupttangenten verlaufen innerhalb eines Winkels von $\frac{\pi}{2}$. Bei $u\!\!\!u^2 < 4w(u - 2w)$ existirt nur eine Haupttangente. Wenn in einem Coordinatensystem $p = q = v = 0$ $u\!\!\!u^2 = 4w(u - 2w)$ ist, so giebt es noch ein anderes, in welchem $u = 2w$ ist, wobei die entsprechende Krümmungslinie auf der nach dem spitzen Winkel zwischen den zwei Haupttangenten gewendeten Seite von anschmiegenden Krümmungslinien begleitet ist. Bei $u\!\!\!u^2 > 4w(u - 2w)$ giebt es immer drei Haupttangenten, und diese Bedingung ist für alle Coordinatentysteme $p = q = v = 0$ erfüllt. Die mittlere der drei in den Kreispunkt eintretenden Krümmungslinien ist beiderseits von anschmiegenden Krümmungslinien begleitet.

II *Ausbiegende Krümmungslinien.* Drei Coordinatensysteme $p = q = v = 0$. In allen $w(u - w) < 0$. Nirgends mehr als zwei Haupttangenten innerhalb eines Winkels von $\frac{\pi}{2}$.

1) $u^2 u\!\!\!u^2 + 4w^3 u > 0$ in den Coordinatensystemen $p = q = v = 0$. Die Tangente des einen Winkels zwischen zwei Haupttangenten ist grösser als die Tangentensumme der beiden anderen. Die Evoluten schneiden einander in der Fokalebene. Evolutenvinkel $> \frac{\pi}{2}$. Jede Schale hat eine Kante, welche im Fokalpunkt endigt.

2) In zwei der bezüglichen Coordinatensysteme ist $u^2 u\!\!\!u^2 + 4w^3 u = 0$, im dritten $u = 0$. Die Tangente des einen Winkels zwischen zwei

Haupttangenten ist gleich der Tangentensumme der beiden anderen. Jede Evolutenschale hat eine Kante, welche in dem Fokalpunkt endigt. Die eine Schale geht mit nur einer Schnittlinie durch die Fokalebene. Die andere ist längs einer mit dieser Schnittlinie zusammenfallenden Kante umgebogen und liegt ganz auf der einen Seite der Fokalebene.

3) In allen Coordinatensystemen $p = q = v = 0$ ist $u^2 w^2 + 4 w^3 u < 0$. Kein Winkel zwischen zwei Haupttangenten hat eine grössere Tangente als die Tangentensumme der beiden anderen. Die Evolutenschalen bilden jede einen geschlossenen Trichter mit drei Kanten, sind auf verschiedenen Seiten der Fokalebene belegen und stossen mit ihren Spitzen im Fokalpunkte zusammen.

III *Eine durchgehende Krümmungslinie und zwei orthogonale.* Für alle bezüglichen Coordinatensysteme ist $w(u - w) = 0$. Der Krümmungslinientypus zeigt eine Combination von umbiegenden und ausbiegenden Krümmungslinien. Beide Evolutenschalen schneiden die Fokalebene. Der Evolutenwinkel ist gleich $\frac{\pi}{2}$. Die eine Schale ist ohne Kanten, die andere hat eine durch den Fokalpunkt hindurchgehende. Wenn im Coordinatensysteme $p = q = v = u - w = 0$ auch $\Phi - \Omega = 0$ ist, so können Grenzfälle der Typen I oder II vorkommen. Die durchgehende Krümmungslinie kann mit einer der orthogonalen zusammenfallen, wobei besondere Typen entstehen.

Kreispunkte mit zwei Symmetriebenen. Im Coordinatensysteme $p = q = 0$ sind sämmtliche Differentialquotienten dritter Ordnung der Flächengleichung gleich Null. Von den Coordinatensystemen $p = q = \partial^{31} = 0$ giebt es zwei orthogonale, in welchen $\partial^{13} = 0$ ist. Ausser den zwei orthogonalen Haupttangenten können noch zwei zu diesen symmetrisch verlaufende existiren.

I *Einlaufende Krümmungslinien der einen Schaar und umkreisende der anderen.* Zwei oder vier Haupttangenten, jede zweite beiderseits von anschmiegenden Krümmungslinien umgeben. Die Evolute bildet zwei geschlossene Trichter auf einer und derselben Seite der Fokalebene. Die eine Schale ist ohne Kanten. Die andere hat zwei oder vier durch die Spitze hindurchgehende Kanten je nach der Zahl der vorhandenen Haupttangenten. Kennzeichen $\Omega(\Phi_{,} - \Omega) > 0$ und $\Omega(\Phi_{,,} - \Omega) > 0$. Im Falle $\Phi_{,} = \Phi_{,,} = 3\Omega$ kann die eine Schale eine Umdrehungsfläche bilden, während die andere zur Rotationsachse degenerirt.

II *Ausbiegende Krümmungslinien.* $\Omega(\Phi_{,} - \Omega) < 0$ $\Omega(\Phi_{,,} - \Omega) < 0$. Immer vier Haupttangenten, jede zweite einer anderen Schaar ange-

hörend. Die Evolutenschalen bilden entweder zwei geschlossene Trichter, einen auf jeder Seite der Fokalebene, mit je zwei durch die Spitze hindurchgehenden Kanten, oder es ist einer der Trichter theilweise durch die Fokalebene hindurch umgebogen, wobei entweder vier Schnittlinien mit der Fokalebene und zwei auf dem nicht umgebogenen Theile durch den Fokalpunkt hindurchgehende Kanten vorhanden sind, oder auch nur zwei Schnittlinien der Evolute mit der Fokalebene existiren, in welchem Falle die Kanten der fraglichen Evolutenschale verschwinden.

III *Durchgehende Krümmungslinien beider Schaaren.* $\Phi_{\prime} \gtrless \Omega \gtrless \Phi_{\prime\prime}$ Zwei oder vier Haupttangenten. Im letzten Fallen gehören drei, welche innerhalb eines Winkels von $\frac{\pi}{2}$ verlaufen, einer und derselben Schaar an, wobei die mittlere beiderseits von anschmiegenden Krümmungslinien umgeben ist. Die eine Evolutenschale bildet einen geschlossenen Trichter mit einer durch den Fokalpunkt gehenden Kante. Die andere kann entweder einen auf derselben Seite der Fokalebene belegenen geschlossenen Trichter mit drei durch den Fokalpunkt hindurchgehenden Kanten bilden, oder sie ist theilweise durch die Fokalebene hindurch umgebogen. In diesem Falle bleiben entweder auf derselben Seite wie die erste Schale vier Blätter, von denen zwei eine durch den Fokalpunkt hindurchgehende Kante haben, es existiren vier Schnittlinien mit der Fokalebene und es sind auf dem umgebogenen Theile zwei durch den Fokalpunkt hindurchgehende Kanten vorhanden; oder aber es bleiben auf der ursprünglichen Seite der Fokalebene nur zwei Blätter, auf denen eine durch den Fokalpunkt hindurchgehende Kante verläuft, es existiren nur zwei Schnittlinien zwischen Evolute und Fokalebene, und die umgebogenen Theile sind ohne Kanten. Der in diese Categorie gehörige Specialfall $\Omega = 0$ bietet eine Evolutenschale auf jeder Seite der Fokalebene dar mit je einer Kante, deren Tangente in der Fokalebene belegen ist und diejenige der anderen Schale rechtwinkelig schneidet.

Die Untersuchung der Kreispunkte der Flächen wäre ohne Berücksichtigung solcher *Flächenpunkte, in welchen der Unterschied der Hauptkrümmungen unendlich klein ist, ohne gleich Null zu sein,* unvollständig.

Da in einem solchen Punkte $r - t = \pm \frac{1}{\infty}$ ist, so haben die geodätischen Krümmungen der Hauptkrümmungslinien unendlich grosse

Werthe, falls nicht $V = 0$ eder $W = 0$ ist. Nur wenn eine dieser Bedingungen erfüllt ist, können wir durch die Differentialquotienten der Flächengleichung Aufschluss über die geometrischen Eigenschaften des Flächenelementes gewinnen. Wir gehen also von der Annahme $r - t = \pm \frac{1}{\infty}$ $v = 0$ aus. Da hierbei $dx = d\sigma_,$ ist, mithin $UW\Phi'$ und Ω'' dieselbe geometrische Bedeutung wie im allgemeinen Flächenpunkte haben und auf dieselbe Weise aus den Differentialquotienten der Flächengleichung erhalten werden, so können wir die beiden Hauptkrümmungen $D_,$ und $D_{,,}$ als Funktionen von $\sigma_,$ in einer Potenzenreihe entwickeln, wobei wir finden:

$$D_, - D_{,,} = r - t + \sigma_,(U - W) + \frac{\sigma_,^2}{2}(\Phi' - \Omega'') .$$

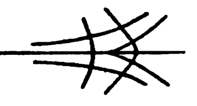
Ist nun $r - t$ von derselben Grössenordnung wie $\sigma_,$, und haben U und W sowie $U - W$ endliche Werthe, so ergiebt die Bedingung $D_, - D_{,,} = 0$ die Existenz eines Kreispunktes, dessen Ort durch die Gleichung

$$\sigma_, = -\frac{r - t}{U - W}$$

angegeben wird, und für welchen die Ableitungen UW etc. nur um unendlich kleine grössen von denen im gegebenen Punkte differiren. Wenn aber U und W endliche Werthe haben, die Differenz $U - W$ von derselben Grössenordnung wie $\sigma_,$ und die Differenz $r - t$ von derselben wie $\sigma_,^2$ ist, so ergiebt die quadratische Gleichung, dass ein oder zwei Kreispunkte sich in unendlich kleiner Entfernung vom gegebenen Punkte befinden, oder aber, dass das Minimum des Unterschiedes der beiden Hauptkrümmungen erreicht wird, ohne dass in der Nähe ein Kreispunkt sich befindet, wenn nämlich

$$2(r - t)(\Phi' - \Omega'') > (U - W)^2$$

ist. In dem Punkte, wo dieses Minimum erreicht wird, ist $U = W$ $R_{,,} = \frac{1}{\infty}$ $\frac{dR_{,,}}{d\sigma_,} = 0$ und $\frac{d^2R_{,,}}{d\sigma_,^2} = \frac{\Omega'' - \Phi'}{W}$, wonach die Krümmungslinienfigur von dem in der Fig. 27 dargestellten Typus ist. Bei Abnahme der Differenz $r - t$ nach Null hin geht diese Figur unmerklich in die in der Fig. 16 S. 90 dargestellte über. Da nun die Krümmungsdifferenz $r - t$ beliebig klein gewählt werden kann, wobei sich gleichzeitig $R_{,,}$ infinite


Fig. 27.

Null nähert, und der Werth $\frac{d}{ds_{,}} \frac{d\sigma_{,,}}{ds_{,,}}$ unendlich gross von beliebiger Ordnung gemacht wird, so folgt hieraus, dass man Krümmungslinien antreffen kann, welche sich einer anderen solchen beliebig nahe anschmiegen, ohne dass ein Kreispunkt vorhanden wäre.

Wenn in einem Kreispunkte $U - W = \frac{1}{\infty}$ ist, $\Phi_{,} - \Omega$ aber einen endlichen Werth hat, so giebt es immer einen anderen Kreispunkt in unendlich kleiner Entfernung, und zwar, wenn U und W endliche Werthe haben, nur einen. Die Gleichung

$$0 = \sigma_{,}(U - W) + \frac{\sigma_{,}^2}{2}(\Phi_{,} - \Omega)$$

giebt den Ort des anderen Kroispunktes an, und für seine geometrischen Constanten, welche wir mit $U_0\, W_0$ bezeichnen erhalten wir:

$$U_0 - W_0 = U - W + \sigma_{,}(\Phi_{,} - \Omega) = -(U - W) \; .$$

Da nun W bis auf unendlich kleine Grössen denselben Werth für beide Kreispunkte haben muss, so hat das Produkt $w(u - w)$ verschiedenes Vorzeichen in den bezüglichen Punkten, und die Krümmungslinienfigur des Flächenelementes stellt sich als die in der Fig. 28 repräsentirte heraus. Wir sehen unmittelbar, wie durch Zusammenrücken beider Punkte der Kreispunkt der Fig. 16 S. 90 entsteht. Ebenso finden wir die geometrische Bedeutung davon, dass bei $U = W$ in einem Kreispunkte die beiden anderen Krümmungslinien orthogonal stehen und endliche Limeswerthe für R_{t} aufweisen. Anders wäre überhaupt die Zusammensetzung von zwei Kreispunkten und der dadurch bedingte Uebergang zwischen den Typen mit ausbiegenden und umbiegenden Krümmungslinien undenkbar.

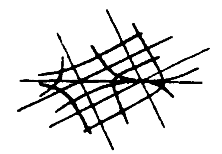


Fig. 28.

Bei $r - t = \frac{1}{\infty} \quad v = u = w = 0 \quad u \gtrless 0$ findet sich immer ein Kreispunkt in unendlich kleiner Entfernung auf der $s_{,,}$-Linie und durch die Gleichung

$$\sigma_{,}^2 = -\frac{2(r - t)}{\Phi' - \Omega''}$$

werden die Oerter von zwei anderen Kreispunkte auf der $s_{,}$-Linie bestimmt, deren Existenz davon abhängt, dass $\Phi' - \Omega''$ und $r - t$ verschiedenes Vorzeichen haben.

Da längs der $s_{,}$-Linie U und W gleichzeitig durch Null hindurchgehen, so ist für beide diese Kreispunkte

$$W_0(U_0 - W_0) = \sigma_{,}^2 \Omega''(\Phi' - \Omega'') = -2\Omega''(r-t) \ .$$

Für den auf der $s_{,,}$-Linie liegenden Kreispunkt, welcher eine mit der Y-Achse zusammenfallende Krümmungslinie hat, haben die Grössen VK dieselbe Bedeutung wie die Grössen WU für eine mit der X-Achse zusammenfallende Haupttangente. Für seinen Ort finden wir:

$$r - t - u\sigma_{,,} = 0$$

und da $V = \sigma_{,,}\Omega'$ ist, K aber einen endlichen Werth hat, so ist für diesen Punkt

$$V_0(K_0 - V_0) = \sigma_{,,} u \Omega' = \Omega'(r-t) \ .$$

Da nun Ω' und Ω'' bis auf die unendlich kleine Grösse $rt(r-t)$ identisch sind, so finden wir, dass die beiden auf der durch den Punkt $v = u = w = 0$ gehenden $s_{,}$-Linie belegenen Kreispunkte einer und derselben Categorie angehören, während der auf der $s_{,,}$-Linie belegene den entgegengesetzten Typus aufweist. Die einzelnen einfachen Kreispunkte haben das gemeinsame Charakteristicum, dass U und W unendlich kleine Werthe haben, während K endlich ist, entstehen aber als Grenztypen auf vier verschiedene Arten. Die auf der $s_{,}$-Linie belegenen haben keine Symmetriebene und besitzen in Uebereinstimmung hiermit drei Haupttangenten, von denen jedoch die eine mit der X-Achse zusammenfällt, und die andere einen unendlich kleinen Winkel mit dieser bildet, während die dritte bis auf einen unendlich kleinen Winkel mit der Y-Achse parallel ist. Je nachdem nun $w_0(u_0 - w_0) \gtrless 0$ ist, zeigen die Krümmungslinien den umbiegenden oder den ausbiegenden Typus. Dass der letzterwähnte Typus auch bei zwei unendlich nahe fallenden Haupttangenten vorkommt, erklärt sich daraus, dass, wenn sich u und w Null nähern, die geodätischen Krümmungen der Hauptkrümmungslinien unendlich gross werden, so dass sie schon in unendlich kleiner Entfernung vom Kreispunkte eine endliche Divergenz haben können.

Der auf der $s_{,}$-Linie belegene Kreispunkt, dessen Haupttangente mit der Y-Achse zusammenfällt, repräsentirt entweder den Grenztypus eines Kreispunktes mit nur einer Haupttangente und umbiegenden Krümmungslinien, oder stellt einen Kreispunkt mit ausbiegenden Krümmungslinien dar, in welchem zwei der Winkel ω sich gleichzeitig infinite $\frac{\pi}{2}$

nähern, wobei also zwei symmetrische Haupttangenten existiren, welche unendlich kleine Winkel mit der X-Achse bilden.

Wenn in einem Punkte $v = u = w = 0$ bei unendlich kleinem Werthe von $r - t$ $\Omega''(\Phi' - \Omega'') > 0$ ist, und dabei $r - t$ und $\Phi' - \Omega''$ verschiedene Vorzeichen haben, so ist für die beiden auf der $s_{\prime}$-Linie belegenen Kreispunkte $w_0(u_0 - w_0) > 0$, und die Krümmungslinienfigur nimmt das in der Fig. 29 schematisch dargestellte Aussehen an, wenn $r - t = -\frac{1}{\infty}$ $u > 0$ $\Phi' > \Omega'' > 0$ ist. Beim Zusammenrücken der drei Kreispunkte im Punkte $v = u = w = 0$ entsteht die in der Fig. 30 dargestellte Krümmungslinienfigur, die also einem Kreispunkte $u_{\prime} = w_{\prime} = 0$ bei $\Omega_{\prime}(\Phi_{\prime} - \Omega_{\prime}) > 0$ entspricht. — Dass diese Krümmungslinienfigur auch direkt als Grenztypus für die Kreispunkte mit nur einer Krümmungslinie entsteht, ersehen wir aus der Fig. 31. Der Kreispunkt, dessen Haupttangente mit der Y-Achse zusammenfällt, hat $u = w = 0$ $u > v > 0$ und $v = \frac{1}{\infty}$ bei $\Omega > 0$. Es findet sich also auf der durch den Kreispunkt gehenden Hauptkrümmungslinie in der Richtung negativer Y ein Punkt $v = w = 0$, in welchem $r - t = +\frac{1}{\infty}$ ist. Wenn also in diesem Punkte $\Phi' > \Omega'' > 0$ ist, so findet sich kein Kreispunkt auf der durch ihn gehenden $s_{\prime}$-Linie. Beim Zusammenfallen des Kreispunktes mit dem Punkte $v = w = 0$ geht nun das Schema der Fig. 31 unmittelbar in dasjenige der Fig. 30 über.

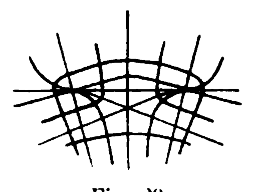


Fig. 29.

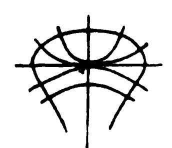


Fig. 30.

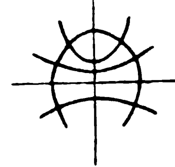


Fig. 31.

Wäre aber anderseits im Punkte $v = u = w = 0$ $\Omega'' > \Phi' > 0$, so würden sich auf der durch ihn gehenden $s_{\prime}$-Linie in unendlich kleiner Entfernung zwei Kreispunkte vom Typus $w(u - w) < 0$ finden, und es würde die Krümmungslinienfigur der Fig. 32 entstehen, welche bei Zusammenrücken der drei Punkte diejenige der Fig. 33 giebt. Eine ähnliche Figur entsteht bei $\Phi' \gtrless 0 \gtrless \Omega''$, wobei nur, wenn $\Omega'' < 0$ ist, in den beiden Figg. 32 und 33 Oben mit Unten zu vertauschen ist. Die einem Kreispunkte $u_{\prime} = w_{\prime} = 0$ bei $\Omega_{\prime}(\Phi_{\prime} - \Omega_{\prime}) < 0$ eigenthümliche Krümmungslinienfigur (Fig. 33) entsteht

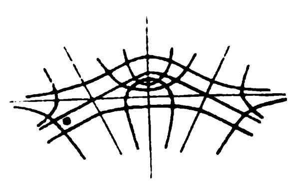


Fig 32.

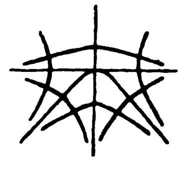


Fig. 33.

auch direkt, wenn in einem Kreispunkte mit ausbiegendem Krümmungslinientypus die zwei Winkel ω sich infinite dem Werthe $\frac{\pi}{2}$ nähern.

Da diese Kreispunktstypen in obiger Darstellung nicht näher untersucht worden sind, wollen wir sie hier näher betrachten. Zunächst finden wir, dass die geodätische Krümmung einer Hauptkrümmungslinie bei $u = w = 0$ den Werth $\frac{1}{0}$ oder $\frac{0}{0}$ bekommt, indem die zweite Ableitung der Differentialgleichung für die Hauptkrümmungslinien

$$\frac{dy\,d^2y}{dx^3} = -\frac{\partial^{31}}{3u} \quad \text{bei} \quad \frac{dy}{dx} = 0$$

ergiebt. Wir ersehen hieraus, dass bei $\partial^{31} \gtrless 0$ längs der X-Achse keine Krümmungslinie mit endlicher geodätischer Krümmung in den Kreispunkt eintritt, dass im Gegentheil eine Spitze gebildet wird, und zwar eine, welche mit derjenigen einer semicubischen Parabel eine Berührung dritter Ordnung hat. Bei $\partial^{31} = 0$ muss aber andererseits $\frac{d^2y}{dx^2}$ einen endlichen Werth haben oder gleich Null sein. Für diesen Fall ergiebt die nächste Ableitung nach Einsetzen von $dy = 0$ und $dy\,d^2y = 0$

$$\frac{\partial^5 z}{\partial x^4 \partial y}\,dx^5 + (6\partial^{22} + 3r^2t - 3\partial^{40})\,dx^3 d^2y + 3u\,dx(d^2y)^2 + 4u\,dx\,dy\,d^3y = 0$$

welche Gleichung, da $\frac{dy\,d^3y}{dx^4}$ bei $\frac{dy}{dx} = 0$ und endlichem Werthe von $\frac{d^2y}{dx^2}$ auch einen endlichen Werth haben kann, einer Schaar von längs der X-Achse einstrahlenden Krümmungslinien entsprechen kann. Welche von diesen reell sind, lässt sich allgemein nicht ohne Zuhilfenahme von Ableitungen noch höherer Ordnung entscheiden. Wenn aber das Flächenelement symmetrisch zur Y-Achse ist, so dass $\frac{\partial^5 z}{\partial x^4 \partial y}$ verschwindet, so wird die Gleichung bei endlichem Werthe von $\frac{d^3y}{dx^3}$ durch die zwei Werthe

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\Phi_{\prime} - 2\Omega_{\prime}}{W}$$

erfüllt, in welchen wir $\partial^{40} - 3r^3 = \Phi_{,}$ und $\partial^{22} - r^3 = \Omega_{,}$ gesetzt haben, indem wir die ohne geodätische Krümmung längs der X-Achse eintretende Hauptkrümmungslinie als $s_{,}$-Linie bezeichnen und das Coordinatensystem $p = q = v = u = w = 0$ anwenden. Die mit der Y-Achse zusammenfallende bezeichnen wir als $s_{,,}$-Linie und diejenige, welche mit endlicher geodätischer Krümmung längs der X-Achse eintritt, als $s_{,,,}$-Linie. Während wir also $\Omega_{,,} = \Omega_{,}$ haben und $\Phi_{,,,} = \Phi_{,}$, finden wir

$$\Omega_{,,,} = \partial^{22} - r^3 + \frac{u\,d^2y}{dx^2} = \Phi_{,} - \Omega_{,}$$

mithin

$$\Omega_{,,,}(\Phi_{,,,} - \Omega_{,,,}) = \Omega_{,}(\Phi_{,} - \Omega_{,})$$

welcher Satz a priori postulirt werden kann und daher den Rückschluss gestattet, dass die beiden Krümmungslinien mit endlichem Werthe von $\frac{d^3y}{dx^3}$ unter den gegebenen Voraussetzungen reell sind.

Wenn wir uns zunächst dem Typus $\Omega_{,}(\Phi_{,} - \Omega_{,}) > 0$ zuwenden und dabei den Fall $u > 0 \quad \Phi_{,} > \Omega_{,} > 0$ wählen, so finden wir, dass, wenn die $s_{,,,}$-Linie positive geodätische Krümmung hat, immer $2\Omega_{,,,} > \Phi_{,,,} > \Omega_{,,,} > 0$ ist. Bei $\Phi_{,} = 2\Omega_{,} = 2\Omega_{,,,}$ fallen die $s_{,}$- und $s_{,,,}$-Linien zusammen, und wenn die $s_{,,,}$-Linie negative geodätische Krümmung hat, so ist immer $2\Omega_{,} > \Phi_{,} > \Omega_{,} > 0$. Erst beim Grenzwerthe $\Phi_{,} = \Omega_{,}$ erreicht die geodätische Krümmung der $s_{,,,}$-Linie den Werthe $-\frac{\Omega_{,}}{u}$, welcher den Limeswerth für $\frac{1}{R_t}$ der $s_{,,}$-Linie darstellt, wobei $\Omega_{,,,} = 0$ wird. Wir finden hieraus, dass immer diejenige von den beiden längs der X-Achse eintretenden Krümmungslinien, deren geodätische Krümmung am meisten von dem Limeswerth $\frac{1}{R_t}$ der $s_{,,}$-Linie abweicht, beiderseits von anschmiegenden Krümmungslinien umgeben ist, wodurch die Krümmungslinienfigur der Fig. 30 S. 116 auf direktem Wege erhalten wird.

Nunmehr lässt sich die Evolute leicht construiren. Zunächst haben wir zu beachten, dass $w_{,,}$ beim Durchgang durch den Kreispunkt längs der $s_{,,}$-Linie sein Vorzeichen wechselt, wonach die beiden Evolutenschalen verschiedenes Vorzeichen des Krümmungsmasses haben. Wenn wir diejenige Schale, welche zuerst von den Normalen berührt

wird, als die erste bezeichnen, so hat die erste negatives, die zweite positives Krümmungsmass. Von den abwickelbaren Normalflächen zeigt die, welche der $s_{,,}$-Linie entspricht, den Typus der Fig. 4 S. 78 und die der Richtung positiver Y am nächsten verlaufende den der Fig. 6, während die dritte eben diesen oder den der Fig. 7 darbieten kann oder auch das nicht durch eine besondere Figur repräsentirte Vorhältniss $4\Omega > \Phi > 3\Omega$ aufweist. Die Gleichungen der Normale geben für $\zeta = \frac{1}{r}$

$$d^2\xi = 0 \qquad\qquad d^2\eta = -\frac{u}{r}\,dy^2$$

wonach die Evolute eine Schnittlinie mit der Fokalebene hat, welche von der Y-Achse tangirt wird. Die Fig. 34 giebt uns schematisch die wohl ohne Weiteres verständlichen Schnittlinien der Evoluten mit zwei auf beiden Seiten des Fokalpunktes parallel zur Tangentialebene gelegten Ebenen. Der Verlauf der geodätischen Linien auf den beiden Schalen ist mit Hilfe der Krümmungslinienfigur (Fig. 30) leicht zu verfolgen. Wenn $\Omega_{,}$ oder u das Vorzeichen wechselt, so besteht die einzige Aenderung darin, dass die beiden Schalen ihren Platz bezüglich der Fokalebene oder der XZ-Ebene tauschen und die Krümmungslinienfigur um 180° gedreht wird.

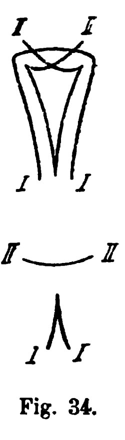


Fig. 34.

Für den Typus $\Omega_{,}(\Phi_{,} - \Omega_{,}) < 0$ finden wir, dass die geodätische Krümmung der $s_{,,,}$-Linie immer dasselbe Vorzeichen hat wie Lim. $\frac{1}{R_t}$ der $s_{,,}$-Linie und numerisch grösser als dieser Limeswerth ist, wonach sich die Krümmungslinienfigur der Fig. 33 direkt ergiebt. Weiter folgt aus der Relation $\Phi_{,} = \Omega_{,} + \Omega_{,,,}$, dass immer für die eine der betreffenden Linien $\Omega \gtrless \Phi \gtrless 0$, für die andvre $\Phi \gtrless 0 \gtrless \Omega$ ist. Wählen wir als Beispiel $u > 0 \quad \Omega_{,} > \Phi_{,} > 0$, wobei $\Omega_{,,,} < 0$ erhalten wird, und für die $s_{,,,}$-Linie $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ ist, wie es die Fig. 33 darstellt. Die der $s_{,}$-Linie entsprechende abwickelbare Normalfläche ist dann vom Typus der Fig. 8 S. 80, die der $s_{,,,}$-Linie entsprechende von dem der Fig. 9. Bei diesem Typus haben beide Evolutenschalen Theile mit Krümmungsmass von verschiedenem Vorzeichen. Von der ersten Schale, welche drei Kanten hat, zeigt das Blatt, welches von der Normale im Punkte

$x = 0 \quad y > 0$ auf der $s_{,,}$-Linie zuerst berührt wird, negatives Krümmungsmass, während die beiden übrigen positives haben, und von der zweiten Schale hat der zwischen Fläche und Fokalebene belegene Theil negatives, der übrige positives Krümmungsmass. Die Anordnung der Evoluten zeigt die Fig. 35. Der Verlauf der geodätischen Linien der ersten Schale mit ihren drei Blättern und drei Kanten gestaltet sich ganz analog dem Verlaufe bei einer Evolute, die aus zwei dreieckigen Trichtern besteht — mit der einzigen Ausnahme, dass die Linien auf dem convex-concaven Blatte nach dem Fokalpunkte zu convergiren, ohne jedoch in diesen hineinzulaufen, da sie die betreffende Kante überschreiten, ehe sie ihn erreichen. Auf der zweiten Schale entspricht einer vom Punkte $\varDelta x > 0$ $y < 0$ zu einem Punkte $x > 0 \quad \varDelta y < 0$ verlaufenden Krümmungslinie eine geodätische Linie, welche von einem Punkte $\varDelta \xi < 0$ $\varDelta \eta > 0 \quad \zeta > \frac{1}{r}$ ausgeht, die Fokalebene in einem Punkt $\varDelta \xi < 0 \quad \varDelta \eta > 0$ passirt, um durch einen Punkt $\varDelta \xi > 0 \quad \varDelta \eta > 0 \quad \zeta < \frac{1}{r}$ weiterzulaufen.

Fig. 35.

Wie bei dem Typus $\Omega_{,}(\Phi_{,} - \Omega_{,}) > 0$, tritt, wenn u oder Ω sein Vorzeichen wechselt, keine andere Aenderung ein, als dass die beiden Evolutenschalen ihren Platz wechseln, und die Krümmungslinienfigur der Fig. 33 um 180° gedreht wird.

Den Uebergang zwischen den beiden geschilderten Typen der Kreispunkte $u_{,} = w_{,} = 0$ stellen die Fälle $\Omega_{,}(\Phi_{,} - \Omega_{,}) = 0$ dar, in welchen wie wir gesehen haben, immer für die eine der längs der X-Achse eintretenden Krümmungslinien $\Phi - \Omega = 0$, für die andere $\Omega = 0$ ist, Um den Uebergangsmodus zu untersuchen, haben wir also zunächst $\Phi_{,} - \Omega_{,} = \frac{1}{\infty}$ zu setzen. Wenn das Flächenelement in der Y-Achse eine Symmetrielinie besitzt, so sind $\frac{d\Phi_{,}}{d\sigma_{,}}$ und $\frac{d\Omega_{,}}{d\sigma_{,}}$ gleich Null, und die Existenz anderer Kreispunkte in der Nähe wird durch die Gleichung

$$\frac{\sigma_{,}^{2}}{2}(\Phi_{,} - \Omega_{,}) + \frac{\sigma_{,}^{4}}{24}\left\{\frac{d^2\Phi_{,}}{d\sigma_{,}^{2}} - \frac{d^2\Omega_{,}}{d\sigma_{,}^{2}}\right\} = 0$$

bestimmt. Wenn sie zwei reelle Wurzeln hat, so ist für die beiden Kreispunkte

$$u_0 - w_0 = \sigma_{,}(\Phi_{,} - \Omega_{,}) + \frac{\sigma_{,}^{3}}{6}\left(\frac{d^2\Phi_{,}}{d\sigma_{,}^{2}} - \frac{d^2\Omega_{,}}{d\sigma_{,}^{2}}\right) = -\sigma_{,}(\Phi_{,} - \Omega_{,})$$

und da $\Omega_{,}$ einen endlichen Werth hat, mithin $w_0 = \sigma_{,}\Omega_{,}$ ist, so resultirt

$$w_0(u_0 - w_0) = -\sigma^2_{,}\,\Omega_{,}(\Phi_{,} - \Omega_{,})$$

Der Uebergang geschieht also dadurch, dass sich zwei Kreispunkte von entgegengesetztem Typus längs der $s_{,}$- oder $s_{,,}$-Linie dem fraglichen Kreispunkte nähern. Auf den Evoluten tauschen dabei die bezüglichen Theile der ersten und zweiten Schale ihren Platz, indem die betreffenden Kanten von der einen auf die andere übergehen, wie es der erste Blick auf die Figg. 34 und 35 lehrt.

Wenn in einem Flächenpunkte $r - t = \frac{1}{\infty}$ und dabei $V = U = W = \mathfrak{W} = 0$ ist, so können sich zwei oder vier Kreispunkte in unmittelbarer Nähe befinden, oder aber es kann der betreffende Punkt das Minimum des Unterschiedes der beiden Hauptkrümmungen darstellen. Die betreffenden Gleichungen

$$r - t + \frac{\sigma_{,}^2}{2}(\Phi' - \Omega'') = 0$$

$$r - t + \frac{\sigma_{,,}^2}{2}(\Omega' - \Phi'') = 0$$

geben die Bedingungen für die verschiedenen Möglichkeiten an. Wenn wir die beiden Werthe Ω' und Ω'', welche nur unendlich wenig differiren, mit Ω bezeichnen, so finden wir bei $r - t = +\frac{1}{\infty}$ keinen Kreispunkt in der Nähe im Falle $\Phi' > \Omega > \Phi''$, zwei im Falle $(\Phi' - \Omega)(\Phi'' - \Omega) > 0$ und vier im Falle $\Phi' < \Omega < \Phi''$. Im ersten Falle entsteht eine Krümmungslinienfigur, welche sich derjenigen eines Kreispunktes mit vorbeigehenden Krümmungslinien beliebig nähert, da $r - t$ beliebig klein gemacht werden kann, und welche bei $r - t = 0$ auch unmittelbar in diese übergeht.

Nach oben befolgter Methode lässt sich zeigen, dass bei Vorhandensein von zwei Kreispunkten $w_0(u_0 - w_0) \gtrless 0$ ist, je nachdem für die betreffende Linie $\Omega(\Phi - \Omega) \gtrless 0$ ist, so wie dass bei Vorhandensein von vieren das eine Par $w_0(u_0 - w_0) > 0$, das andere $w_0(u_0 - w_0) < 0$ hat. Auf diese Weise entstehen die drei Haupttypen der Kreispunkte mit zwei Symmetrieebenen, wie es die Figg. 36—38 zeigen, durch Zusammenrücken von zwei oder vier einfachen Kreispunkten.

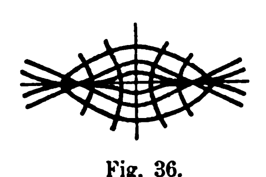


Fig. 36.

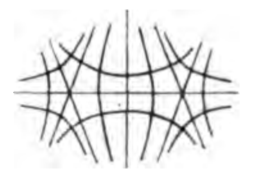


Fig. 37.

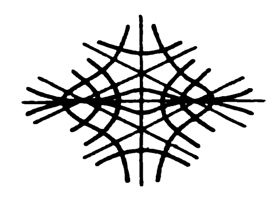


Fig. 38.

Auch asymetrische Combinationen von zwei einfachen Kreispunkten wie z. B. die Fig. 39 eine zeigt, können vorkommen, wenn nämlich in einem Flächenpunkte $r - t = \frac{1}{\infty}$ $V = W = \mathfrak{W} = 0$ dabei aber $U = \frac{1}{\infty}$

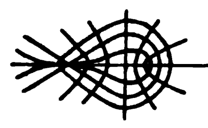


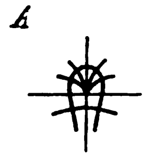
Fig. 39.

ist, indem dann die Gleichung S. 113 zwei verschiedene reelle Werthe für $\sigma_{,}$ angiebt, wonach w_0 für die beiden Kreispunkte numerisch verschiedene Werthe mit verschiedenem Vorzeichen hat, während $u_0 - w_0$, wie es die Gleichung S. 114 zeigt, für beide Kreispunkte numerisch gleiche Werthe mit verschiedenem Vorzeichen hat.

Nach eben derselben Methode finden wir die Formen $\Omega(\Phi_{,} - \Omega) = 0$ $\Omega(\Phi_{,,} - \Omega) = 0$ der Kreispunkte mit zwei Symmetrieebenen, welche die Uebergänge zwischen den drei Haupttypen darstellen, indem wir die Fällle $\Phi_{,} - \Omega = \frac{1}{\infty}$ $\Phi_{,,} - \Omega = \frac{1}{\infty}$ $\Omega = \frac{1}{\infty}$ untersuchen. Im Falle $\Phi_{,} - \Omega = \frac{1}{\infty}$ können in unendlich kleiner Entfernung auf der $s_{,}$-Linie ein oder zwei Kreispunkte Vorhanden sein, für welche $w_0(u_0 - w_0)$ entgegengesetztes Vorzeichen gegenüber $\Omega(\Phi_{,} - \Omega)$ hat, und der Uebergang geschieht durch Zusammenrücken beider oder aller drei Kreispunkte. Wir erinnern uns, dass

$$\Phi_{,,,} - \Omega_{,,,} = 2\,\Omega \qquad \Omega_{,,,} = \frac{(\Phi_{,} - \Omega)\cos^2\vartheta + (\Phi_{,,} - \Omega)\sin^2\vartheta}{2}$$

ist, wonach nur in Kreispunkten mit vorbeigehenden Krümmungslinien Ω oder $\Omega_{,,,}$ gleich Null sein kann, ohne dass zwei Linien $\Phi - \Omega = 0$ vorhanden sind. Dagegen hat $\Omega_{,,,}$ einen endlichen Werth, wenn nur eine Linie $\Phi - \Omega = 0$ existirt.



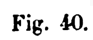


Fig. 40.

Da es überfüssig erscheint, den Uebergang für die verschiedenen Fälle ausführlich durchzugehen, begnüge ich mich damit, in den Figg. 40 *A* und *B* zwei Beispiele zu zeigen. Für die erste dieser Krümmungslinienfiguren ist $\Phi_{,} > 3\,\Omega > 0$

$\Phi_{\prime\prime} = \Omega$ $\quad \frac{d\Phi_{\prime\prime}}{d\sigma_{\prime\prime}} - \frac{d\Omega}{d\sigma_{\prime\prime}} > 0$, für die zweite $\Omega > \Phi_{\prime} > 0$ $\quad \Phi_{\prime\prime} = \Omega$ $\frac{d\Phi_{\prime\prime}}{d\sigma_{\prime\prime}} - \frac{d\Omega}{d\sigma_{\prime\prime}} < 0$. Jene bildet den Uebergang zwischen Kreispunkten mit umkreisenden und solchen mit vorbeigehenden Krümmungslinien, diese zwischen solchen mit ausbiegenden und vorbeigehenden Krümmungslinien. Längs der $s_{\prime\prime}$-Linie stellen diese Kreispunkte einen Typus höherer Ordnung dar, und in Uebereinstimmung damit finden wir, dass diese Linie nicht mehr auf beiden Seiten des Kreispunktes derselben Schaar der Krümmungslinien angehört.

Aus dieser Darstellung, welche infinite fortgesetzt werden kann, geht hervor, dass, wenn in einem Kreispunkte ausser $D_{\prime} - D_{\prime\prime}$ auch $dD_{\prime} - dD_{\prime\prime}$ $d^2D_{\prime} - d^2D_{\prime\prime} \ldots\ldots$ bis $d^nD_{\prime} - d^nD_{\prime\prime}$ längs einer bestimmten Krümmungslinie gleich Null sind, die fragliche Krümmungslinie nur dann auf beiden Seiten des Kreispunktes derselben Schaar angehört, wenn n eine ungerade Zahl ist. Wenn wir nun bei $n = 0$ den Kreispunkt als solchen erster Ordnung in Bezug auf die fragliche Krümmungslinie bezeichnen, wobei *ein Kreispunkt m-ter Ordnung als aus m einfachen Kreispunkten zusammengesetzt* angesehen werden kann, so können wir folgenden Satz aussprechen:

Wenn die Ordnungszahl eines Kreispunktes längs einer Krümmungslinie gerade ist, so gehört diese auf beiden Seiten des Kreispunktes derselben Schaar an; im entgegengesetzten Falle begegnen sich längs der gegebenen Haupttangente im Kreispunkte zwei Krümmungslinien, welche je einer der beiden Schaaren angehören.

Bei Zusammensetzung einer unendlich grossen Zahl von Kreispunkten entstehen Linien sphärischer Krümmung. Diese sind von zweierlei Art, je nachdem ausser $D_{\prime} - D_{\prime\prime} = 0$ auch $dD_{\prime} = dD_{\prime\prime} = 0$ längs der ganzen Linie ist oder nicht ist. Letzterer Typus, welcher auf den allgemeinen Canalflächen vorkommt, entsteht nach dem Schema der Fig. 28 S. 114 und hat also orthogonale Krümmungslinien, welche die Linie unter spitzen Winkel schneiden, aber die Krümmungslinien der einen Schaar setzen sich nicht geradlinig auf der anderen Seite der Linie sphärischer Krümmung fort, sondern biegen bei Durchgang durch diese rechtwinkelig um.

Zu der anderen Categorie gehören die Linien sphärischer Krümmung auf den Umdrehungsflächen. Für einen Punkt auf einer solchen Linie ist im Coordinatensystem $p = q = v = u = w = 0$ auch $\Phi_{\prime} = 0$, während Ω und u von Null verschiedene Werthe hahen können. Die

geodätische Krümmung der Linie sphärischer Krümmung muss offenbar gleich $-\frac{\Omega}{u}$, dem Lim. $\frac{1}{R_t}$ der $s_{\prime\prime}$-Linie sein, einestheils weil die Linie sphärischer Krümmung ein Parallelkreis auf der Umdrehungsfläche ist, anderentheils auch weil nur für diese geodätische Krümmung $\frac{d^2 D_t}{ds^2}$ gleich Null ist, wenn Ω einen von Null verschiedenen Werth hat. Wie wir S. 117 gesehen haben, hätte aber dann $\frac{dy\, d^3y}{dx^4}$ bei $\frac{dy}{dx} = 0$ einen endlichen Werth, falls die Linie sphärischer Krümmung eine Krümmungslinie wäre. Im allgemeinen Falle stellen also die Linien sphärischer Krümmung der Umdrehungsflächen nicht Krümmungslinien dar, sondern sie sind die einhüllenden Curven der unendlich kurzen Krümmungslinien, welche zwischen den einzelnen Kreispunkte der Linie verlaufen. Die Krümmungslinien gehen nicht durch die Linie hindurch, sondern die Meridiane gehören auf jeder Seite der Linie einer anderen Schaar an. In Uebereinstimmung hiermit ist die Umdrehungsachse aus Theilen beider Evolutenschalen gebildet. Die Abwickelbare Normalfläche längs einem Meridiane ist nämlich nach dem Typus der Fig. 4 S. 78 angeordnet, wobei die Linien EF und FG, die je einer Schale angehören, in die Umdrehungsachse zusammenfallen. Ist dagegen u gleich Null, $\Phi_{\prime\prime} \gtrless 0$, so dass die Linie sphärischer Krümmung als von zweiter Ordnung längs einem Meridiane angesehen werden kann, so gehen die Krümmungslinien der einen Schaar durch die Linie hindurch, und die Linie selbst ist eine Krümmungslinie der anderen. Dies ist u. A. der Fall, wenn die Linie sphärischer Krümmung einen Aequator der Undrehungsfläche darstellt.

---

4. Die Constitution des nicht astigmatischen Strahlenbündels.

Für ein Strahlenbündel, dessen Leitstrahl die Normale in einem Kreispunkte der Wellenfläche darstellt, habe ich in meiner früheren Publikation den Namen quasihomocentrisch angewendet. Seitdem hat aber in der Litteratur der constructiven Optik das Wort anastigmatisch Eingang gefunden, und deshalb ziehe ich es vor, nunmehr diesen Ausdruck anzuwenden, obwohl seine sprachliche Herleitung nicht sehr ansprechend ist.

Ebenso wie wir bei der Untersuchung des allgemeinen Strahlenbündels neue Gesichtspuukte fanden, die beim Flächenelemente nicht berücksichtigt waren, so haben wir auch, um das anastigmatische Strahlenbündel kennen zu lernen, gewisse Umformungen der bereits bekannten geometrischen Grössen des Flächenelementes und der Evolute vorzunehmen und neue Untersuchungen hinzuzufügen, wobei hauptsächlich dieselben Probleme zu lösen sind, die uns beim allgemeinen Strahlenbündel entgegentraten.

Wie wir S. 39 gesehen haben, können wir die allgemeinen Gleichungen der Normale durch Entwickelung in Reihen erhalten, indem wir einestheils die Coordinaten des Flächenpunktes, anderentheils aber auch die trigonometrischen Tangentenwerthe p und q als unabhängige Variabele betrachten. Die nach erstgenannter Methode angegebenen Werthe gelten ohne Weiteres für das anastigmatische Strahlenbündel, aber in den nach den Variabelen p und q ausgeführten Deductionen haben wir geometrische Grössen eingeführt, welche für das anastigmatische Strahlenbündel nicht gelten. Wir haben also zunächst die für die Entwicklung der Normalengleichung in Potenzen von p und q nöthigen Werthe anzugeben und zwar durch die Differentialquotienten der Flächengleichung ausgedrückt. Es ergiebt sich unmittelbar für ein Coordinatensystem $p = q = v = 0$:

$$d\xi = (\zeta_{,} - \zeta)dp \qquad d\eta = (\zeta_{,} - \zeta)dq$$

$$d^2\xi = -\frac{u}{r^3}\,dp^2 - \frac{w}{r^3}\,dq^2 \qquad d^2\eta = -\frac{2w}{r^3}\,dp\,dq - \frac{\mathfrak{w}}{r^3}\,dq^2$$

$$d^3\xi = -\left(\frac{\partial^{40} - 3r^3}{r^4} - \frac{3u^2}{r^5}\right)dp^3 - \frac{3\partial^{31}}{r^4}\,dp^2dq - 3\left(\frac{\partial^{22} - r^3}{r^4} - \frac{w(u+2w)}{r^5}\right)dp\,dq^2 -$$
$$-\left(\frac{\partial^{13}}{r^4} - \frac{3w\mathfrak{w}}{r^5}\right)dq^3$$

$$d^3\eta = -\frac{\partial^{31}}{r^4}\,dp^3 - 3\left(\frac{\partial^{22} - r^3}{r^4} - \frac{w(u+2w)}{r^5}\right)dp^2dq - 3\left(\frac{\partial^{13}}{r^4} - \frac{3w\mathfrak{w}}{r^5}\right)dp\,dq^2 -$$
$$-\left(\frac{\partial^{04} - 3r^3}{r^4} - \frac{3(w^2 + \mathfrak{w}^2)}{r^5}\right)dq^3$$

Sämmtliche Coëfficienten dieser Gleichungen sind lineare Grössen, welche allen Wellenflächen gemeinsam sind und das Strahlenbündel an sich bestimmen. Ohne auf ihre geometrische Bedeutung näher einzugehen, was unnötig weit führen würde, begnügen wir uns damit, zu constatiren, dass $\frac{u}{r^3}$ der Krümmungshalbmesser der Kantlinie der entsprechenden abwickelbaren Normalfläche ist, sowie dass $\frac{\partial^{40} - 3r^3}{r^4} - \frac{3u^2}{r^5}$ dieselbe Bedeutung für diese Kantlinie hat wie A' im allgemeinen Strahlenbündel. Indem wir nun folgende Bezeichnungen für ein Coordinatensystem $p = q = v = 0$ einführen:

$$\frac{u}{r^3} = R' \qquad \frac{w}{u} = \lambda' \qquad \frac{\mathfrak{w}}{u} = \lambda''$$

$$\frac{\partial^{40} - 3r^3}{r^4} - \frac{3u^2}{r^5} = A' \qquad \frac{\partial^{31}}{r^4} = B' \qquad \frac{\partial^{22} - r^3}{r^4} - \frac{w(u+2w)}{r^5} = C$$

$$\frac{\partial^{13}}{r^4} - \frac{3w\mathfrak{w}}{r^5} = B' \qquad \frac{\partial^{04} - 3r^3}{r^4} - \frac{3(w^2 + \mathfrak{w}^2)}{r^5} = A'$$

und ähnlich wie beim allgemeinen Strahlenbündel als *erste* bezw. *zweite laterale Aberration eines bestimmten Strahles* die Abscisse ξ bezw. die Ordinate η seines Schnittpunktes mit der Fokalebene bezeichnen, so finden wir die einfachen Ausdrücke:

$$d^2\xi = -R'(dp^2 + \lambda' dq^2) \qquad d^2\eta = -R'(2\lambda' dp\,dq + \lambda'' dq^2)$$

$$d^3\xi = -A' dp^3 - 3B' dp^2 dq - 3C dp\,dq^2 - B' dq^3$$

$$d^3\eta = -B' dp^3 - 3C dp^2 dq - 3B' dp\,dq^2 - A' dq^3$$

Diese Grössen sind es also, durch die wir ein anastigmatisches Strahlenbündel bestimmen, für welches die Orientirung einer den Leitstrahl enthaltenden abwickelbaren Normalfläche bekannt ist. Natürlich könnten wir andere wählen, welche sich in unendlich vielen Combinationen darbieten, wenn mehr als eine solche Normalfläche vorhanden ist. In solchen Fällen ist z. B. die Kenntniss der geometrischen Eigenschaften der verschiedenen s- und t-Linien ausreichend, um das Strahlenbündel zu bestimmen u. s. w. Wir haben eben diese gewählt, um die einfachsten Ausdrücke zu erhalten.

Ebenso wie im allgemeinen Strahlenbündel bezeichnen wir die Tangentialebenen der den Hauptstrahl enthaltenden abwickelbaren Normalflächen als die *Hauptschnitte des Strahlenbündels.* Die angeführten geometrischen Grössen beziehen sich also auf einen bestimmten Hauptschnitt, und aus ihnen erhalten wir durch schon angegebene Mittel die entsprechenden Grössen für einen anderen Hauptschnitt, wenn wir es aus irgend einem Grunde vorziehen, das Strahlenbündel von diesem aus zu studiren. Ebenso wie wir die Bezeichnungen $u, u_{,,} \ldots . w, w_{,,} \ldots .$ angewendet haben, um die Werthe zu bezeichnen, welche u w in den verschiedenen Coordinatensystemen $p = q = v = 0$ annehmen, benützen wir auch die entsprechenden Bezeichnungen $A', A'_{,,} \ldots . \lambda', \lambda'_{,,} \ldots .$, um die den verschiedenen Hauptschnitten des Strahlenbündels angehörigen geometrischen Grössen anzugeben. Für die drei Grössen, welche ein anastigmatisches Strahlenbündel mit zwei Symmetriebenen bestimmen, setzen wir $A_{,} = A'_{,} = A'_{,,}$ $A_{,,} = A'_{,,} = A'$, $C = C_{,} = C_{,,}$ und bezeichnen die den symmetrischen, nicht orthogonalen Hauptschnitten entsprechenden Grössen mit $A_{,,,}$ bezw. $C_{,,,}$.

Zunächst wollen wir nun mit Hilfe der S. 72 angegebenen Bedingungsgleichung dafür, dass sich zwei Normalen schneiden, constatiren, dass im anastigmatischen Strahlenbündel, ähnlich wie in dem allgemeinen, *die Normalen, welche den Hauptstrahl schneiden,* eine geradlinige Fläche bilden, welche längs dem Hauptstrahl einen Hauptschnitt berührt. Es geht dies unmittelbar aus der Gleichung

$$v + w(a + b) + uab = ua + va(a + b) + wa^2 b$$

hervor, indem, wenn der Punkt $x_{,,} y_{,,}$ dem Hauptstrahl entspricht, und mithin $dx_{,,} = dy_{,,} = 0$ und $a = b = \frac{dy_{,}}{dx_{,}}$ gesetzt wird, die Bedingung $\frac{dy_{,}}{dx_{,}} = 0$ mit der Bedingung $v = 0$ identisch ist.

Aus derselben Gleichung finden wir, dass nicht in allen anastigmatischen Strahlenbündeln ein beliebiger Strahl jede den Hauptstrahl enthaltende abwickelbare Normalfläche schneidet. Wenn nämlich in einem Coordinatensysteme $p = q = v = 0$ der Punkt $x_{\prime\prime} y_{\prime\prime}$ auf der die X-Achse tangirenden Hauptkrümmungslinie belegen ist, mithin $dy_{\prime\prime} = 0$ gesetzt wird, so resultirt die quadratische Gleichung:

$$(dx_{\prime} - dx_{\prime\prime})(2w\,dx_{\prime} + \mathfrak{w}\,dy_{\prime}) = u\,(dx^2_{\prime} - dx^2_{\prime\prime}) + w\,dy^2_{\prime},$$

welche, in Bezug auf $dx_{\prime\prime}$ aufgelöst, nur dann einen reellen Werth giebt, wenn

$$\{2(u - w)\,dx_{\prime} - \mathfrak{w}\,dy_{\prime}\}^2 + 4uw\,dy^2_{\prime} > 0$$

ist. Es ergiebt sich also, dass die den Hauptstrahl enthaltenden abwickelbaren Normalflächen nur unter der Voraussetzung $\lambda' > 0$ von jedem Strahle des Strahlenbündels geschnitten werden. In scheinbarem Widerspruch hiermit steht die leicht zu constatirende Thatsache, dass in einem Strahlenbündel mit einer Symmetriebene auch bei $\lambda' < 0$ jeder Strahl die Symmetrieebene schneidet. Wie wir uns erinnern, haben solche Strahlenbündel die aus zwei dreieckigen Trichtern bestehende Evolute, aus welcher es sich leicht erklärt, dass die Strahlen, welche die Symmetrieebene schneiden, ohne die mit ihr zusammenfallende Normalfläche zu treffen, jenseits der Kantlinie dieser durch jene hindurchgehen.

Wir folgern hieraus, dass der Begriff der *longitudinalen Aberration* im allgemeinen anastigmatischen Strahlenbündel nicht anwendbar ist. Für die anastigmatischen Strahlenbündel mit zwei Symmetrieebenen haben aber sämmtliche für das entsprechende astigmatische Strahlenbündel deducirten Ausdrücke für die longitudinalen und lateralen Aberrationen eines Strahles volle Geltung. Man hat nur Φ' durch $\Phi_{\prime}$, A' durch $A_{\prime}$ u. s. w. zu ersetzen.

Bei der Untersuchung der *Conoide des anastigmatischen Strahlenbündels* und ihrer *Doppellinien* ergiebt sich eine Vereinfachung gegenüber dem astigmatischen Strahlenbündel darin, dass die Conoide von der Form $x^2 + y^2 = R^2$ mit denen von der Form $p^2 + q^2 = \omega^2$ zusammenfallen.

Wenn wir uns zunächst den Conoiden der allgemeinen anastigmatischen Strahlenbündel zuwenden, so finden wir, dass in einem Coordinatensystem $p = q = v = 0$ zwei Strahlen sich unter den Bedingungen $dx_{\prime} - dx_{\prime\prime} = 0$ und $dy_{\prime} + dy_{\prime\prime} = 0$ schneiden, welche Bedingungen die

Gleichungen $dx^2_{,} + dy^2_{,} = dx^2_{,,} + dy^2_{,,} = dR^2$ erfüllen, woraus hervorgeht dass eine Doppellinie der Conoide jedem Hauptschnitte des Strahlenbündels entspricht. Ausserdem giebt es aber noch eine andere Doppellinie. Zwei Strahlen schneiden sich nämlich auch unter den Bedingungen $dx_{,} + dx_{,,} = dy_{,} + dy_{,,} = 0$, $dx^2_{,} + dy^2_{,} = dx^2_{,,} + dy^2_{,,} = dR^2$.

Während die erstgenannten Doppellinien den in astigmatischen Strahlenbündeln vorkommenden völlig entsprechen, so entsteht die letzterwähnte dadurch, dass jede geradlinige Fläche, welche von den Normalen längs einer durch den Kreispunkt hindurhgehenden geodätischen Linie gebildet wird, eine Doppellinie aufweist, indem ihre Striktionslinie eine Spitze im Fokalpunkte hat. Die Bedingung hierfür ist, dass die geodätische Torsion beim Durchgang der Linie durch den Kreispunkt ihr Vorzeichen wechselt. Diese Doppellinie findet sich also nicht bei Strahlenbündeln, für welche sämmtliche Differentialquotienten dritter Ordnung in der Flächengleichung gleich Null sind, die der vierten aber endliche Werthe haben.

Bis auf unendlich kleine Grössen dritter Ordnung fällt *diese Doppellinie* mit der *Schnittlinie des Conoides mit der Fokalebene* zusammen. Wenn wir nämlich in die Normalengleichungen $\zeta = \frac{1}{r} = \frac{1}{t}$ setzen und ξ bezw, η nach Potenzen von x und y entwickeln, wobei unendlich kleine Grössen höherer Ordnung als der zweiten vernachlässigt werden, so erhalten wir die beiden Gleichungen:

$$\xi = -\frac{1}{2r}(ux^2 + wy^2)$$

$$\eta = -\frac{1}{2r}(2wxy + uy^2)$$

welche unverändert bleiben, wenn x und y gleichzeitig das Vorzeichen wechseln. Zusammen mit der Gleichung

$$x^2 + y^2 = R^2$$

für die Begrenzungslinie des Conoides stellen diese Gleichungen eine Ellipse dar, auf der in jedem Punkte sich zwei Normalen treffen, welche je zwei diametral einander gegenüberstehenden Punkten des Flächenelementes entsprechen. Bei Mitnahme von unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung zeigt es sich zwar, dass die Doppellinie weder exakt eine Ellipse darstellt noch in der Fokalebene belegen ist, so dass wir das Resultat nur in der Weise formuliren können, dass die frag-

liche Doppellinie bei infinite nach Null hin abnehmender Oeffnung des Conoides sich infinite der Form einer in der Fokalebene belegenen Ellipse nähert.

Wie schon im vorigen Capitel anlässlich der Untersuchung der Schnittlinien der Evolute mit der Fokalebene erwähnt worden ist, stellen die einhüllenden Curven der Schnittlinien der Normalenconoide mit der Fokalebene eben die Schnittlinien dieser mit der Evolute dar. Wenn wir uns also an den ersten Annäherungswerth halten und, wie dort, x bezw. y durch $R\cos\vartheta$ bezw. $R\sin\vartheta$ ersetzen, so erhalten wir die Ellipsengleichung in der Form:

$$\xi = -\frac{R^2 r^2 R'}{2}(\cos^2\vartheta + \lambda'\sin^2\vartheta)$$

$$\eta = -\frac{R^2 r^2 R'}{2}(\lambda'\sin 2\vartheta + \lambda''\sin^2\vartheta)$$

aus welcher unmittelbar hervorgeht, dass die durch den Fokalpunkt gehenden Tangenten der Ellipse, weil von R unabhängig, eben den Evolutenwinkel bilden.

Wenn die XZ-Ebene eine Symmetrieebene des Strahlenbündels, mithin $\lambda'' = 0$ ist, so fällt die eine Achse der Ellipse in die XZ-Ebene, und jede Hälfte der durch diese getheilten Ellipse entspricht zwei einander gegenüberliegenden Quadranten der durch die Coordinatenachsen getheilten Begrenzungslinie des Conoides. Die Coordinaten des Mittelpunktes der Ellipse sind:

$$\xi = -\frac{R^2 r^2 R'}{4}(1 + \lambda') \qquad \eta = 0$$

die Länge der in die XZ-Ebene fallenden Halbachse:

$$\pm\frac{R^2 r^2 R'}{4}(1 - \lambda'),$$

während wir die Länge der mit der Y-Achse parallelen Halbachse in der Weise erhalten, dass wir $\frac{d\eta}{d\vartheta} = 0$ setzen und den resultirenden Werth von η ermitteln:

$$\eta = \pm\frac{R^2 r^2 R'}{2}.\lambda'$$

Bei $u = 0$ d. h. $\lambda' = \infty$ geht die Ellipse durch den Fokalpunkt, in Uebereinstimmung damit, dass der Evolutenwinkel, wie wir schon wis-

sen, gleich π ist. Bei $\lambda' < 0$ liegt der Fokalpunkt innerhalb der Ellipse, und es existirt keine Schnittlinie der Evolute mit der Fokalebene. Bei $\lambda'' \gtrless 0$ können wir auf ähnliche Weise die Constanten der Ellipse erhalten: sie steht dann aber nicht mit der einen Achse senkrecht auf der entsprechenden Haupttangente, und ihr Mittelpunkt liegt nicht mehr im entsprechenden Hauptschnitte.

Es ist offenbar, dass der dünnste Querschnitt eines allgemeinen anastigmatischen Strahlenbündels durch die beiden Schenkel des Evolutenwinkels — falls ein solcher existirt — und durch den bezüglichen Theil der fraglichen, der Begrenzungslinie des Conoides entsprechenden Ellipse eingeschlossen wird, wonach z. B. für ein Strahlenbündel mit einer Symmetrieebene die Dicke des dünnsten Querschnittes bei $\lambda' > 0$ aus der Summe des Abstandes des Mittelpunktes der Ellipse vom Fokalpunkt und der Länge der in die Symmetrieebene fallenden Halbachse erhalten wird, bei $\lambda' < 0$ aber gleich der ganzen bezüglichen Ellipsenachse ist.

Um *die übrigen Doppellinien des allgemeinen anastigmatischen Strahlenbündels* zu untersuchen, haben wir denselben Weg zu verfolgen, den wir bei unserer Untersuchung der t-Linien der abwickelbaren Normalflächen S. 74 betreten haben, indem wir nur $dy_{,} + dy_{,,} = 0$ anstatt $dy_{,} = dy_{,,} = 0$ setzen. Wir begnügen uns damit, die Schnittpunkte der Doppellinien mit der Fokalebene sowie ihre Tangente, osculirende Ebene und erste Krümmung in diesem Punkte kennen zu lernen, wonach wir nur folgende Werthe brauchen:

$$d\xi = 0 \qquad d\eta = 0 \qquad d\zeta = -\frac{w}{r^3}\,dx$$

$$d^2\xi = -\frac{u-2w}{r}\,dx^2 - \frac{w}{r}\,dy^2 \qquad d^2\eta = -\frac{u}{r}\,dy^2$$

in welchen wir ξ und η als Funktionen von ζ und R betrachten, mithin nach Elimination von dx und dy mittels der Gleichung $dx^2 + dy^2 = dR^2$ folgende Beziehungen finden:

$$d\xi = 0 \qquad d\eta = 0$$

$$d^2\xi = -\frac{r^3(u-3w)}{w^2}\,d\zeta^2 - \frac{w}{r}\,dR^2 \qquad d^2\eta = \frac{r^3 u}{w^2}\,d\zeta^2 - \frac{u}{r}\,dR^2$$

Die Tangenten der Doppellinien stehen also bei ihrem Durchgang durch die Fokalebene senkrecht auf dieser, und die einem be-

stimmten Coordinatensystem $p = q = r = 0$ entsprechende Dopellinie schneidet die Fokalebene im Punkte

$$\xi = -\frac{R^2 w}{2r} = -\frac{R^2 r^2 R^2}{2} \cdot \lambda' \qquad \eta = -\frac{R^2 u}{2r} = -\frac{R^2 r^2 R^2}{2} \cdot \lambda''$$

wobei ihre osculirende Ebene den Winkel

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{\frac{d^2\eta}{d\zeta^2}}{\frac{d^2\xi}{d\zeta^2}} = -\operatorname{arc\,tg} \frac{u}{u - 3w} = -\operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda''}{1 - 3\lambda'}$$

mit dem entsprechenden Hauptschnitt bildet, und die erste Krümmung

$$\sqrt{\left(\frac{d^2\xi}{d\zeta^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2\eta}{d\zeta^2}\right)^2} = \frac{r^3}{w^2} \sqrt{(u - 3w)^2 + u^2} = \frac{1}{R^2 \lambda'^2} \sqrt{(1 - 3\lambda')^2 + \lambda''^2}$$

ist[1].

Da jeder Strahl des ganzen Conoides durch alle Doppellinien hindurchgehen muss, ist es nicht so leicht, sich den Bau des Conoides anschaulich zu machen, wenn man nicht die zur Fokalebene parallelen Schnitte zu Hilfe nimmt. Diese erhalten wir am bequemsten, indem wir in den beiden Normalengleichungen ζ verschiedene Werthe geben. So lange $\frac{1}{r} - \zeta$ einen endlichen Werth hat, weicht die Form des Querschnittes unendlich wenig von der eines Kreises ab. Wenn wir aber ζ bis auf unendlich kleine Grössen mit $\frac{1}{r}$ gleich machen und in den beiden Gleichungen unendlich kleine Grössen höherer Ordnung als der zweiten weglassen, so nehmen diese folgende Form an:

$$\xi = R \cos\vartheta (1 - \zeta r) - \frac{R^2}{2r} (u \cos^2\vartheta + w \sin^2\vartheta)$$

$$\eta = R \sin\vartheta (1 - \zeta r) - \frac{R^2}{2r} (w \sin 2\vartheta + u \sin^2\vartheta)$$

Auf einem zur Fokalebene parallelen Schnitte des Conoides, welcher von einer Doppellinie geschnitten wird, muss nun ein Doppelpunkt vorhanden sein, und auf denjenigen Schnitten, welche den Schnittpunkt einer Doppellinie mit der Begrenzungsfläche des Conoides enthalten, muss die Curve eine diesem Schnittpunkte entsprechende Spitze

[1] Vergleiche den Werth $\frac{1}{\cos\omega_{,} \cos\omega_{,,} \cos\omega_{,,,}}$ S. 84!

aufweisen. Diese Spitzen sind es, die wir zunächst suchen. Ihre Bedingung $\frac{d\xi}{d\vartheta} = 0 \quad \frac{d\eta}{d\vartheta} = 0$ wird in jedem Coordinatensysteme $p^2 = q = v = 0$ durch $\vartheta = 0$ und $\zeta - \frac{1}{r} = -\frac{Rw}{r^2}$ erfüllt, wodurch wir andererseits

$$\xi = -\frac{R^2}{2r}(u - 2w) \qquad \frac{d^2\xi}{d\vartheta^2} = \frac{R^2}{r}(u - 2w)$$

erhalten. Wir schliessen hieraus, dass die fraglichen Spitzen immer von der Kreispunktsnormale weg schauen. Diese Spitzen sind ausserdem die Schnittpunkte der t-Linie der betreffenden abwickelbaren Normalfläche mit der Begrenzungsfläche des Conoides.

Nunmehr können wir uns leicht den Bau der Conoide der verschiedenen Typen veranschaulichen. Wir setzen dabei der Einfachheit wegen $u = 0$ voraus, da die Nichterfüllung dieser Bedingung ohne Einfluss auf den Typus ist, wie schon aus unserer Untersuchung der Kreispunkte hervorgeht. Im Falle $u > 2w > 0$ existirt bekanntlich nur ein Hauptschnitt und folglich nur eine Doppellinie der fraglichen Art. Wenn wir die zur Tangentialebene parallelen Schnitte des Conoides in der Richtung von der Wellenfläche nach der Fokalebene zu verfolgen, finden wir bei $\zeta - \frac{1}{r} = -\frac{Rw}{r^2}$ eine Schnittcurve, ausserhalb welcher der Schnittpunkt mit dem Hauptstrahl liegt, und die in demjenigen ihrer Schnittpunkte mit dem Hauptschnitte des Strahlenbündels, welcher dem Hauptstrahl am nächsten liegt, eine nach dem Binnenraum der Curve schauende Spitze aufweist. Wird dann ζ immer grösser gemacht, so entsteht aus dieser Spitze eine Schlinge im Binnenraume der Curve, welche sich immer mehr vergrössert, bis bei $\zeta = \frac{1}{r}$ beide Theile der Curve in die erwähnte Ellipse zusammenfallen. Die Schnitte jenseits der Fokalebene zeigen dieselben Erscheinungen in umgekehrter Ordnung. Bei diesem Typus bleibt also die Doppellinie in ihrem ganzen Verlaufe auf derselben Seite des Conoides. Wie zu erwarten war — wenn wir uns an die Conoide der astigmatischen Strahlenbündel erinnern — ist die Bedingung $u = 3w$ für eine gerade Doppellinie erfüllt, wenn die Wellenfläche zweiten Grades ist.

Bei $2w_{,} > u_{,} > w_{,} > 0$ haben wir drei Hauptschnitte, welche alle innerhalb eines Winkels von $\frac{\pi}{2}$ orientirt sind. Da bei $u_{,} = 0$ die Linie $w =$ Max. mit der ersten Haupttangente zusammenfällt, so haben

wir $w_{,} > w_{,,}$ bei $w_{,,} = w_{,,,}$, und die Schnittserie bietet zuerst bei $\zeta - \frac{1}{r} = - \frac{Rw_{,}}{r^2}$ eine geschlossene Curve dar, innerhalb welcher der Schnittpunkt mit dem Hauptstrahl liegt, und welche im Punkte $\xi > 0$ $\eta = 0$ eine nach aussen schauende Spitze aufweist, aus der in den folgenden Schnitten eine nach aussen gerichtete Schlinge entsteht, die bei $\zeta - \frac{1}{r} = - \frac{Rw_{,,}}{r^2} = - \frac{Rw_{,,,}}{r^2}$ zwei symmetrisch belegene, nach aussen gerichtete Spitzen bekommt. Aus diesen Spitzen entsteht nun wieder je eine nach aussen gerichtete Schlinge, so dass die Totalfigur nunmehr aus einer geschlossenen Curve mit drei Doppelpunkten und drei nach aussen gerichteten Schlingen besteht, von denen jedoch die eine erbeblich grösser als die beiden anderen ist. Auf den folgenden Schnitten nähern sich die Doppelpunkte einander, fallen zusammen und gehen wieder auseinander in entgegengesetzter Richtung, wodurch das Bild einer geschlossener Curve entsteht mit einer nach dem Binnenraume gerichteten Schlinge, die jedoch so gross ist, dass sie den gegenüberliegenden Curventheil überragt und also in zwei Punkten schneidet. Je näher dem Fokalpunkte die Schnitte fallen, um so kleiner werden die Winkel zwischen den Curventangenten in den Doppelpunkten, bis schliesslich in der Fokalebene die Schlinge mit dem anderen Theile der Curve in die Ellipse zusammenfällt. Je kleiner $2w_{,} - u_{,}$ ist, desto näher aneinander rücken die Schnittpunkte der Doppellinien mit der Ellipse, und bei $u_{,} = 2w_{,}$ fallen sie zusammen. Das gleiche ist der Fall mit zweien von ihnen, wenn bei $u_{,} \gtrless 0$ nur zwei Hauptschnitte existiren. Je mehr sich andererseits $u_{,}$ und $w_{,}$ nähern, um so mehr rücken diese Schnittpunkte aus einander, und wenn bei $u_{,} = w_{,}$ die Ellipze zu eine gerade Linie wird, so gehen die drei Doppellinien durch den Mittelpunkt und die beiden Endpunkte dieser Linie. Da aber hierbei für die beiden orthogonalen Hauptschnitte $w = 0$ ist, so stehen die betreffenden Doppellinien nicht mehr senkrecht auf der Fokalebene. Eine vollständige Untersuchung dieses Specialfalles dürfte daher die Mitnahme von unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung erheischen.

In den Fällen $w(u - w) < 0$ ergeben sich die Doppellinien nach derselben Methode, und die Erscheinungen sind dieselben wie im letzterwähnten Typus, mit der Ausnahme, dass nicht die zwei Schlingen aus der zuerst gebildeten entstehen, sondern im Gegentheil drei selbständige nach aussen gerichtete Schlingen erscheinen, aus welcher Figur in der Fokalebene die Ellipsendoppellinie auf dieselbe Weise ge-

bildet wird. Der einzige Unterschied zwischen den verschiedenen Typen mit drei Hauptschnitten liegt also in den verschiedenen Lagen und Richtungen der Doppellinien, welche mit den gegebenen Mitteln für jedes Strahlenbündel leicht zu erhalten sind. Nur das mögen wir erwähnen, dass in den Strahlenbündeln $w(u-w) > 0$ die mittlere der Doppellinien zwar nicht längs ihrem ganzen Verlaufe aber mit beiden Endpunkten und dem Schnittpunkte mit der Fokalebene auf derselben Seite des Conoides liegt, während sowohl die beiden anderen Doppellinien bei diesem Typus wie sämmtliche beim Typus $w(u-w) < 0$ mit ihren Schnittpunkten mit der Fokalebene auf entgegengesetzter Seite des Conoides sich befinden gegenüber der, auf welcher ihre Endpunkte belegen sind. Falls eine Symmetrieebene vorhanden ist, schneiden sich also die drei Doppellinien in einem Punkte auf jeder Seite der Fokalebene, aber bei Abwesenheit einer Symmetrieebene fallen die bezüglichen Schnittpunkte der Doppellinien nicht zusammen.

Für die Untersuchung der *Conoiddoppellinien der anastigmatischen Strahlenbündel mit zwei Symmetrieebenen* haben wir zunächst die Bedingungen zu ermitteln, unter welchen sich zwei Strahlen in solchen Strahlenbündeln schneiden. Wenn wir unsere Gleichung S. 71.

$$(q_{,} - q_{,,})(x_{,} - x_{,,} + p_{,}z_{,} - p_{,,}z_{,,}) = (p_{,} - p_{,,})(y_{,} - y_{,,} + q_{,}z_{,} - q_{,,}z_{,,})$$

viermal differentiiren, wobei sich für $r = t \quad x = y = p = q = 0$

$$4(d^3q_{,} - d^3q_{,,})(dx_{,} - dx_{,,}) + 6(d^2q_{,} - d^2q_{,,})(d^2x_{,} - d^2x_{,,}) +$$
$$+ 4(dq_{,} - dq_{,,})(d^3x_{,} - d^3x_{,,} + 3\,dp_{,}d^2z_{,} - 3\,dp_{,,}d^2z_{,,}) =$$
$$= 4(d^3p_{,} - d^3p_{,,})(dy_{,} - dy_{,,}) + 6(d^2p_{,} - d^2p_{,,})(d^2y_{,} - d^2y_{,,}) +$$
$$+ 4(dp_{,} - dp_{,,})(d^3y_{,} - d^3y_{,,} + 3\,dq_{,}d^2z_{,} - 3\,dq_{,,}d^2z_{,,})$$

ergiebt, dann

$$d^2p = r\,d^2x \qquad\qquad d^2q = r\,d^2y$$
$$d^3p = \partial^{40}dx^3 + 3\partial^{22}dx\,dy^2 + r\,d^3x$$
$$d^3q = 3\partial^{22}dx^2dy + \partial^{04}dy^3 + r\,d^3y$$

einsetzen, so erhalten wir:

$$(dy_{,} - dy_{,,})\{\Phi_{,}(dx_{,}^3 - dx_{,,}^3) + 3\,\Omega(dx_{,}dy_{,}^2 - dx_{,,}dy_{,,}^2)\} =$$
$$= (dx_{,} - dx_{,,})\{3\,\Omega(dx_{,}^2dy_{,} - dx_{,,}^2dy_{,,}) + \Phi_{,,}(dy_{,}^3 - dy_{,,}^3)\}$$

welche Gleichung sowohl durch $dx_{,} - dx_{,,} = dy_{,} + dy_{,,} = 0$ wie durch $dx_{,} + dx_{,,} = dy_{,} - dy_{,,} = 0$ nicht aber durch $dx_{,} + dx_{,,} = dy_{,} + dy_{,,} = 0$

erfüllt wird. Hierdurch ist einerseits die Existenz von zwei in den Symmetrieebenen belegenen Doppellinien bewiesen, andererseits aber auch das Nichtvorhandensein einer der Ellipse des allgemeinen Conoides entsprechenden Doppellinie constatirt. Um die zwei weiteren bei Vorhandensein von noch zwei Hauptschnitten zu erwartenden Doppellinien zu finden setzen wir $dx_,^2 + dy_,^2 = dx_{,,}^2 + dy_{,,}^2 = dR^2$, woraus die Identitäten:

$$dx_,^2 dy_, - dx_{,,}^2 dy_{,,} = dR^2(dy_, - dy_{,,}) - (dy_,^3 - dy_{,,}^3)$$

$$dx_, dy_,^2 - dx_{,,} dy_{,,}^2 = dR^2(dx_, - dx_{,,}) - (dx_,^3 - dx_{,,}^3)$$

hervorgehen, durch welche die Gleichung folgende Form erhält:

$$(dy_, - dy_{,,})\{(\Phi_, - 3\Omega)(dx_,^3 - dx_{,,}^3) + 3\Omega dR^2(dx_, - dx_{,,})\} =$$

$$= (dx_, - dx_{,,})\{(\Phi_{,,} - 3\Omega)(dy_,^3 - dy_{,,}^3) + 3\Omega dR^2(dy_, - dy_{,,})\}$$

und schliesslich:

$$\frac{\Phi_, - 3\Omega}{\Phi_{,,} - 3\Omega} = \frac{dy_,^2 + dy_, dy_{,,} + dy_{,,}^2}{dx_,^2 + dx_, dx_{,,} + dx_{,,}^2}$$

ergiebt.

Da hier das rechte Membrum immer positiv ist, und da das linke Membrum bei positivem Werthe das Vorhandensein von zwei Hauptschnitten ausserhalb der Symmetrieebenen angiebt, so finden wir, dass nur bei Vorhandensein von vier Hauptschnitten die Conoide dieser Strahlenbündel mehr als zwei Doppellinien aufweisen können. Aber auch in diesem Falle sind die beiden anderen Doppellinien nicht von derselben Art wie die beiden in den Symmetrieebenen belegenen, da nämlich nicht immer jeder Strahl durch sie hindurchgehen muss, was wir am leichtesten dadurch constatiren, dass wir $dy_{,,} = 0$ setzen, $dy_,$ durch die Gleichung $dx_,^2 + dy_,^2 = dR^2$ eliminiren, mithin auch $dx_{,,} = dR$ setzen, wonach sich eine quadratische Gleichung für $dx_,$ ergiebt, welche nur im Falle $4 \geqq 3\left(\frac{\Phi_, - 3\Omega}{\Phi_{,,} - 3\Omega}\right)^2$ einen reellen Werth giebt. Dass aber andererseits diese sozusagen *accessorischen Doppellinien* immer bei Vorhandensein von vier Hauptschnitten existiren, geht theils aus der sogleich vorzunehmenden Untersuchung der Conoidquerschnitte hervor, theils können wir aber unmittelbar die Schnittpunkte mit der Conoidoberfläche finden, wodurch ihre Existenz bewiesen wird. Wenn wir nämlich $dx_,$ und $dx_{,,}$ sowie gleichzeitig $dy_,$ und $dy_{,,}$ zusammenfallen lassen, so finden wir $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{\Phi_, - 3\Omega}{\Phi_{,,} - 3\Omega}$, d. h. die Doppellinien

und die t-Linien der nicht orthogonalen abwickelbaren Normalflächen schneiden die Conoidoberfläche in einem und demselben Punkte. Der entsprechende zur Fokalebene parallele Schnitt des Conoides muss also vier Spitzen aufweisen, ebenso wie der Schnitt, welcher die Schnittpunkte der t-Linien der orthogonalen abwickelbaren Normalflächen mit der Conoidoberfläche enthält. Dass diese Spitzen immer von der Kreispunkts normale weg, d. h. nach aussen schauen, beweisen wir auf dieselbe Weise wie bei dem allgemeinen Conoide, indem wir aus den Gleichungen eines Conoidquerschnittes in unendlich kleiner Entfernung von der Fokalebene — wobei also bis auf unendlich kleine Grössen $\zeta = \frac{1}{r}$ ist —

$$\xi = R\cos\vartheta\,(1-\zeta r) - \frac{R^3}{6r}\,(\Phi_{,}\cos^3\vartheta + 3\,\Omega\cos\vartheta\sin^2\vartheta)$$

$$\eta = R\sin\vartheta\,(1-\zeta r) - \frac{R^3}{6r}\,(3\,\Omega\cos^2\vartheta\sin\vartheta + \Phi_{,,}\sin^3\vartheta)$$

in einem Coordinatensysteme $p = q = \partial^{31} = \partial^{13} = 0$ für die gleichzeitige Erfüllung der Bedingungen $\frac{d\xi}{d\vartheta} = 0$ und $\frac{d\eta}{d\vartheta} = 0$ entweder die Werthe:

$$\vartheta = 0 \qquad \zeta = \frac{1}{r} - \frac{R^2\Omega}{2r^2}$$

$$\xi = -\frac{R^3}{6r}(\Phi_{,} - 3\,\Omega) \qquad \frac{d^2\xi}{d\vartheta^2} = \frac{R^3}{2r}(\Phi_{,} - 3\,\Omega)$$

oder

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} \qquad \zeta = \frac{1}{r} - \frac{R^2\Omega}{2r^2}$$

$$\eta = -\frac{R^3}{6r}(\Phi_{,,} - 3\,\Omega) \qquad \frac{d^2\eta}{d\vartheta^2} = \frac{R^3}{2r}(\Phi_{,,} - 3\,\Omega)$$

ermitteln oder aber

$$\Phi_{,}\cos^2\vartheta - \Omega(2\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) = \Phi_{,,}\sin^2\vartheta + \Omega(\cos^2\vartheta - 2\sin^2\vartheta)$$

d. h.

$$\operatorname{tg}^2\vartheta = \frac{\Phi_{,} - 3\,\Omega}{\Phi_{,,} - 3\,\Omega}$$

finden. Wir drehen dann das Coordinatensystem, bis eine der nicht orthogonalen Haupttangenten mit der X-Achse zusammenfällt, wobei

wir $\Phi_{,}$ durch $\Phi_{,,,}$ und Ω durch $\Omega_{,,,}$ zu ersetzen haben. Hierbei erscheint aber in den Gleichungen für die Conoidquerschnitte ∂^{13}, und zwar mit dem Coefficienten $\sin^3\vartheta$ in der ersten, mit dem Coefficienten $\cos\vartheta\sin^2\vartheta$ in der zweiten. Da die zwei ersten Ableitungen von $\sin^3\vartheta$ und die erste von $\cos\vartheta\sin^2\vartheta$ bei $\vartheta = 0$ verschwinden, so gelten für ein beliebiges Coordinatensystem $p = q = \partial^{31} = 0$ die Werthe für die zwei in die fragliche XZ-Ebene fallenden Spitzen

$$\vartheta = 0 \qquad \zeta = \frac{1}{r} - \frac{R^2\Omega_{,,,}}{2r^2}$$

$$\xi = -\frac{R^3}{6r}(\Phi_{,,,} - 3\Omega_{,,,}) \qquad \frac{d^2\xi}{d\vartheta^2} = \frac{R^3}{2r}(\Phi_{,,,} - 3\Omega_{,,,})$$

In sämmtlichen diesen Werthen haben wir bei $\vartheta = \pi$ bezw. $\vartheta = -\frac{\pi}{2}$ R durch $-R$ zu ersetzen.

Nachdem wir so die Schnittpunkte der Doppellinien mit der Conoidoberfläche gefunden haben, wenden wir uns ihren Schnittpunkten mit dem Hauptstrahle zu. Zunächst wollen wir dabei die in der YZ-Ebene liegende Doppellinie in einem Coordinatensysteme $p = q = \partial^{31} = \partial^{13} = 0$ untersuchen, indem wir die Normalengleichung

$$\xi - x + p(\zeta - z) = 0$$

dreimal differentiiren und sämmtliche Ableitungen von ξ gleich Null setzen, wobei wir

$$\zeta = \frac{1}{r}$$

$$d^3\xi = 0 = d^3x - \zeta d^3p - 3\,dp\,d^2\zeta + 3\,dp\,d^2z$$

d. h.

$$d^2\zeta = -\frac{\Phi_{,}}{3r^2}dx^2 - \frac{\Omega}{r^2}dy^2$$

erhalten. Dann differentiiren wir die andere Normalengleichung

$$\eta - y + q(\zeta - z) = 0$$

gleichfalls dreimal:

$$d^3\eta = d^3y - \zeta d^3q - 3\,dq\,d^2\zeta + 3\,dq\,d^2z$$

und setzen den Werth von $d^2\zeta$ ein, wobei wir

$$d^3\eta = \frac{\Phi_{,} - 3\Omega}{r}dx^2dy - \frac{\Phi_{,,} - 3\Omega}{r}dy^3$$

erhalten. Wir sehen, dass die Bedingung für einen Schnittpunkt der fraglichen Doppellinie mit dem Hauptstrahl $d^3\eta = 0$ nur durch

$$dy = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{\Phi_, - 3\Omega}{\Phi_{,,} - 3\Omega}$$

erfüllt wird. Bei Vorhandensein von nur zwei Hauptschnitten hat also die Doppellinie nur einen Schnittpunkt mit dem Hauptstrahl, nämlich bei $dy = 0$, wobei im Conoide $dx = \pm dR$ ist, und $\zeta = \frac{1}{r} - \frac{R^2 \Phi_,}{6r^2}$ erhalten wird. Bei Vorhandensein von vier Hauptschnitten aber findet sich noch ein Schnittpunkt der Doppellinie mit dem Hauptstrahl vor, nämlich bei $\frac{dy_,}{dx_,} = \pm \sqrt{\frac{\Phi_, - 3\Omega}{\Phi_{,,} - 3\Omega}}$ und $\frac{dy_{,,}}{dx_{,,}} = \mp \sqrt{\frac{\Phi_, - 3\Omega}{\Phi_{,,} - 3\Omega}}$, welche Werthe die Bedingung $dy_, - dy_{,,} = dx_, + dx_{,,} = 0$ erfüllen. Auf dieselbe Weise finden wir, dass auch die in der XZ-Ebene liegende Doppellinie bei denselben Werthen von dy^2 und dx^2 den Hauptstrahl schneidet. Da nun ausserdem die Werthe $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{\Phi_, - 3\Omega}{\Phi_{,,} - 3\Omega}$ bei $dy_, + dy_{,,} = 0$ und $dx_, + dx_{,,} = 0$ die Bedingungsleichung

$$\frac{dy_,^2 + dy_, dy_{,,} + dy_{,,}^2}{dx_,^2 + dx_, dx_{,,} + dx_{,,}^2} = \frac{\Phi_, - 3\Omega}{\Phi_{,,} - 3\Omega}$$

für die zwei accessorischen Doppellinien erfüllen, so finden wir, dass alle vier Doppellinien des Conoides mit vier Hauptschnitten den Hauptstrahl in einem und demselben Punkte schneiden. Wir sehen, dass die drei Schnittpunkte der Doppellinien mit dem Hauptstrahl der Bedingung $dy = 0$ in je einem der vier Coordinatensysteme $p = q = \partial^{31} = 0$ entsprechen. Hierbei haben wir aber

$$d^2\zeta = -\frac{\Phi}{3r^2} dx^2$$

und finden also die drei parallel zur Tangentialebene gelegten Ebenen, mit welchen wir das Conoid schneiden müssen, um diese Schnittpunkte zu treffen:

$$\zeta = \frac{1}{r} - \frac{R^2 \Phi}{6r^2}$$

Bei $\Phi = \Phi_,$ finden wir den Schnittpunkt der in der YZ-Ebene verlaufenden Doppellinie mit dem Hauptstrahl, bei $\Phi = \Phi_{,,}$ den entsprechenden Schnittpunkt mit der in der XZ-Ebene verlaufenden Doppellinie,

und wenn wir endlich $\Phi = \Phi_{,,,}$ setzen, so treffen wir den Hauptstrahl in dem Punkte, wo er von sämmtlichen vier Doppellinien geschnitten wird.

Bevor wir zur Untersuchung der betreffenden Schnittcurven übergehen, haben wir noch die Reihenfolge der die Spitzen bezw. die Schnittpunkte der Doppellinien mit dem Hauptstrahl enthaltenden Ebenen zu eruiren. Aus den S. 92 angegebenen Relationen erhalten wir leicht folgende:

$$\Phi_{,} - \Phi_{,,,} = (\Phi_{,} - 3\Omega)\sin^2\vartheta \qquad \Phi_{,,} - \Phi_{,,,}' = (\Phi_{,,} - 3\Omega)\cos^2\vartheta$$

$$3\Omega_{,,,} - \Phi_{,,,} = 2(\Phi_{,,,} - 3\Omega) = 2(\Phi_{,} - 3\Omega)\cos^2\vartheta = 2(\Phi_{,,} - 3\Omega)\sin^2\vartheta$$

aus welchen die für alle Strahlenbündel mit zwei Symmetrieebenen und vier Hauptschnitten geltenden Reihenfolgen

$$\Phi_{,} \gtrless \Phi_{,,,} \gtrless 3\Omega \qquad \Phi_{,,} \gtrless \Phi_{,,,} \gtrless 3\Omega$$

$$3\Omega_{,,,} \gtrless \Phi_{,,,} \gtrless 3\Omega$$

hervorgehen. ϑ ist hier der Winkel zwischen zwei Hauptschnitten. Für die Beziehung der drei Grössen $\Phi_{,}, \Phi_{,,}, 3\Omega_{,,,}$ zu einander finden wir

$$\Phi_{,} - 3\Omega_{,,,} = (\Phi_{,} - 3\Omega)(\sin^2\vartheta - 2\cos^2\vartheta)$$

$$\Phi_{,,} - 3\Omega_{,,,} = (\Phi_{,,} - 3\Omega)(\cos^2\vartheta - 2\sin^2\vartheta)$$

und haben also unter folgenden Bedingungen die nebenstehenden Reihenfolgen:

$$\operatorname{tg}^2\vartheta > 2 \qquad \Phi_{,} \gtrless 3\Omega_{,,,} \gtrless \Phi_{,,} \gtrless \Phi_{,,,} \gtrless 3\Omega$$

$$2 > \operatorname{tg}^2\vartheta > \frac{1}{2} \qquad 3\Omega_{,,,} \gtrless \begin{pmatrix}\Phi_{,}\\ \Phi_{,,}\end{pmatrix} \gtrless \Phi_{,,,} \gtrless 3\Omega$$

$$\operatorname{tg}^2\vartheta < \frac{1}{2} \qquad \Phi_{,,} \gtrless 3\Omega_{,,,} \gtrless \Phi_{,} \gtrless \Phi_{,,,} \gtrless 3\Omega$$

Nachdem wir nunmehr über die nöthigen Mittel verfügen, um die Strahlenconoide kennen zu lernen, wollen wir zunächst ein Strahlenbündel mit nur zwei Hauptschnitten und dabei die Alternative $\Phi_{,} > 3\Omega > \Phi_{,,} > 0$ wählen.

Die zur Tangentialebene der Wellenfläche parallelen Schnitte eines Conoides zeigen in der Nähe der Fläche eine Gestalt, welche sich unendlich wenig von der kreisförmigen unterscheidet. Weiter ab werden sie oblong, wobei die grösste Achse der Curve in der *YZ*-Ebene

liegt. Die Curventheile, welche, die XZ-Ebene schneiden, nähern sich immer mehr, bis sie sich einander bei $\zeta = \frac{1}{r} - \frac{R^2 \Phi_{\prime}}{6 r^3}$ berühren, so dass die Curve einen Doppelpunkt bekommt. In den nächsten Schnitten überragen sie einander, indem aus dem Doppelpunkt zwei solche entstehen, welche, in der YZ-Ebene belegen, sich immer mehr von einander entfernen, bis sie bei $\zeta = \frac{1}{r} - \frac{R^2 \Omega}{2 r^3}$ in zwei nach aussen gerichtete Spitzen übergehen. Im selben Momente entstehen auf den beiden Curventheilen, welche die XZ-Ebene schneiden, je eine nach aussen gerichtete Spitze, so dass die Curve eine viereckige Gestalt bekommt mit nach aussen gerichteten, in den Coordinatenebenen belegenen Spitzen. In den weiteren Schnitten verschwinden die beiden in der YZ-Ebene belegenen Spitzen, während aus den anderen Schlingen entstehen, so dass nunmehr zwei in der XZ-Ebene belegene Doppelpunkte vorhanden sind, welche sich immer mehr nähern, um bei $\zeta = \frac{1}{r} - \frac{R^2 \Phi_{\prime\prime}}{6 r^3}$ zusammenzufallen, so dass dieselbe Curvenform wie bei $\zeta = \frac{1}{r} - \frac{R^2 \Phi_{\prime}}{6 r^3}$ entsteht, aber mit der grössten Achse in der XZ-Ebene. Die folgenden Schnitte zeigen eine geschlossene Curve ohne Doppelpunkte, deren Form sich immer mehr der des Kreises nähert.

Um den Bau des Conoides bei Vorhandensein von vier Hauptschnitten im Strahlenbündel ohne Schwierigkeit zu verstehen, brauchen wir einige erläuternde Figuren. In diesen habe ich aber wegen der zeitraubenden Arbeit die Curven nicht punktweise construirt, sondern nur die Schnittpunkte mit den Normalen berechnet, welche denjenigen Punkten der Wellenfläche entsprechen, in denen die Begrenzungslinie des Conoides die abwickelbaren Normalflächen schneidet. Diese Data sind aber ausreichend, um die Curvenform schematisch kennen zu lernen. Da ausserdem die Coordinaten dieser Schnittpunkte in den durch die Figuren dargestellten Schnitten sämmtlich Produkte von

$$\pm \frac{R^2}{6 r^3} (\Phi_{\prime} - 3 \Omega)$$

mit den trigonometrischen Funktionen des Winkels ϑ zwischen den Hauptschnitten sind, so gelten die Schemata für alle Strahlenbündel mit demselben Winkel ϑ. Wir haben also nur zwei Haupttypen zu untersuchen, nämlich bei $\mathrm{tg}^2 \vartheta > 2$ bezw. $\mathrm{tg}^2 \vartheta < \frac{1}{2}$ und bei $2 > \mathrm{tg}^2 \vartheta > \frac{1}{2}$.

Für den ersten Typus habe ich $\vartheta = 30^0$ gewählt. Wenn wir unter der Annahme $\Phi_{,} > 3\,\Omega > 0$ die gewöhnliche Schnittserie des Conoides von der Wellenfläche nach der Fokalebene zu verfolgen, so sehen wir zuerst, wie aus der anfänglichen Kreisform bei $\zeta = \frac{1}{r} - \frac{R^2\Phi_{,,}}{6r^2}$ die Curve der Figur 41 entsteht.

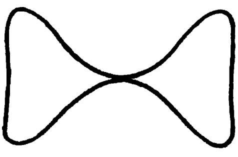


Fig. 41.

In leicht verständlicher Weise geht diese Curvenform bei $\zeta = \frac{1}{r} - \frac{R^2\Omega_{,,,}}{2r^2}$ in die der Fig. 42 über.

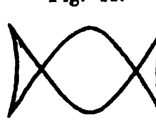


Fig. 42.

Aus den vier Spitzen dieser entstehen nun vier nach aussen gewendete Schlingen, so dass die folgenden Schnitte sechs Doppelpunkte aufweisen, welche sich anfänglich zu je dreien nähern, dann zusammenfallen und wieder auseinandergehen, während sich die Figur in der Richtung der Y-Achse in die Länge dehnt, und die beiden Punkte $\xi = \text{Max.}$ und $\xi = \text{Min.}$ der Figur 42 sich immer mehr nähern, bis bei $\zeta = \frac{1}{r} - \frac{R^2\Phi_{,}}{6r^2}$ die Curvenform der Fig. 43 entsteht mit 7 Doppelpunkten.

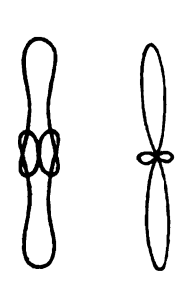


Fig. 43. Fig. 44.

In den nächsten Schnitten überragen einander die sich im Schnittpunkte des Hauptstrahles berührenden Curventheile, so dass 8 Doppelpunkte vorhanden sind, nämlich je zwei in den beiden Coordinatenebenen und je einer in den von diesen gebildeten Quadranten, die Kringelähnlichen Curventheile verkleinern sich, indem alle Doppelpunkte sich nähern, bis sie bei $\zeta = \frac{1}{r} - \frac{R^2\Phi_{,,,}}{6r^2}$ im Schnittpunkte des Hauptstrahles zusammenfallen und das Schema der Fig. 44 zum Vorschein kommt.

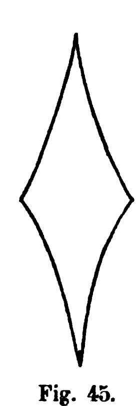


Fig. 45.

Die weiteren Schnitte zeigen vier nach aussen gerichtete Schlingen, welche bei $\zeta = \frac{1}{r} - \frac{R^2\Omega}{2r^2}$ in Spitzen auslaufen, so dass die Curve der Fig. 45 aus derjenigen der Fig. 44 dadurch entsteht, dass der Doppelpunkt dieser in vier zerfällt welche sich immer mehr von einander entfernen. Schliesslich erhält die Curve bei endlichem Werthe von $\zeta - \frac{1}{r}$ die Kreisform wieder.

Für den anderen Typus habe ich $\vartheta = 45^0$, $\Phi_{\prime} > 3\Omega > 0$ gewählt. Hier entstehen zunächst bei $\zeta = \frac{1}{r} - \frac{R^2 \Omega_{\prime\prime\prime}}{2r^3}$ die vier Spitzen der Fig. 46, aus welchen sich dann vier nach aussen gerichtete Schlingen bilden, indem die Curven der folgenden Schnitte vier Doppelpunkte aufweisen, die sich immer mehr nähern, so dass bei $\zeta = \frac{1}{r} - \frac{R^2 \Phi_{\prime}}{6r^3} = \frac{1}{r} - \frac{R^2 \Phi_{\prime\prime}}{6r^3}$ die Curve der Fig. 47 entsteht. In den nächsten Snitten überragen einander die vier im Schnittpunkte des Hauptstrahles sich zu je zweien berührenden Curventheile, während die vier Schlingen immer mehr verkleinert werden, so dass der in der Fig. 48 nach grösserem Masstabe dargestellte Typus den Uebergang bildet zu der bei $\zeta = \frac{1}{r} - \frac{R^2(\Phi_{\prime} + \Phi_{\prime\prime\prime})}{12r^3}$ auftretenden Curvenform. Indem nämlich die die Coordinatenebenen rechtwinkelig schneidenden Curventheile sich den bezüglichen Doppelpunkten nähern, verkleinern sich auch die Schlingen immer mehr, und ihre bezüglichen Curventheile nähern sich den vier zwischen den genannten Ebenen liegenden Doppelpunkten, bis im Momente des Zusammenfallens bei dem letzterwähnten Werthe von ζ eine einzige geschlossene wellenförmige Linie die Schnittcurve des Conoides bildet. Auf eben dieselbe Weise, aber in umgekehrter Reihenfolge entstehen dann bei $\zeta = \frac{1}{r} - \frac{R^2 \Phi_{\prime\prime\prime}}{6r^3}$ die Curve der Fig. 49 und bei $\zeta = \frac{1}{r} - \frac{R^2 \Omega}{2r^3}$ die Curve der Fig. 50, aus welcher schliesslich die Kreisform wieder hervorgeht.

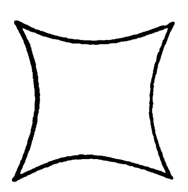


Fig. 46.

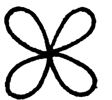


Fig. 47.

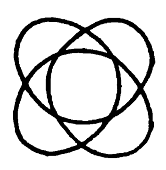


Fig. 48.

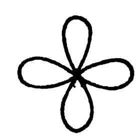
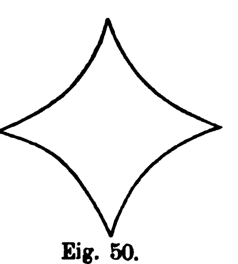


Fig. 49.



Eig. 50.

Den Beweis, dass der Querschnitt bei $\zeta = \frac{1}{r} - \frac{R^2(\Phi_{\prime} + \Phi_{\prime\prime\prime})}{12r^3}$ eine *umkreisende Doppellinie* darstellt, in welcher jeder Punkt drei verschiedenen Flächenpunkten entspricht, liefern die Conoidengleichungen S. 137, welche, wenn wir unter Beachtung der bei $\Phi_{\prime} = \Phi_{\prime\prime}$ bestehenden Identitäten:

$$\frac{\Phi_{,} + \Phi_{,,,}}{2} = \frac{3(\Phi_{,} + \Omega)}{4} = \frac{3(\Phi_{,,,} + \Omega_{,,,})}{4}$$

den Werth $1 - \zeta r = \frac{R^2(\Phi_{,} + \Omega)}{8r}$ einsetzen, in folgende Form überführt werden können

$$\xi = \frac{R^3(\Phi_{,} - 3\,\Omega)}{24r} \cos\vartheta\,(3 - 4\cos^2\vartheta)$$

$$\eta = \frac{R^3(\Phi_{,} - 3\,\Omega)}{24r} \sin\vartheta\,(3 - 4\sin^2\vartheta)$$

und dieselben Werthe von ξ bezw. η geben, wenn anstatt ϑ der Ausdruck $\vartheta + \frac{2n\pi}{3}$ eingesetzt wird, in welchem n eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Zu einem identischen Resultat gelangen wir, wenn wir die Bedingungsgleichung für die nicht in den Coordinatenebenen liegenden Doppellinien des Conoides S. 136 lösen, was bei $\Phi_{,} = \Phi_{,,}$ sehr leicht ist. Wenn wir nämlich $dx_{,} dy_{,} dx_{,,} dy_{,,}$ durch $dR\cos\alpha$, $dR\sin\alpha$, $dR\cos\beta$, $dR\sin\beta$ ersetzen, so können wir ihr die Form

$$(\sin\alpha + \sin\beta)^2 - (\cos\alpha + \cos\beta)^2 + \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = 0$$

geben, aus welcher unter Beachtung der Identitäten

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta) = \cos^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta) - \sin^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

die Gleichung

$$\left\{\cos^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta) - \sin^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right\}\left\{1 - 4\cos^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right\} = 0$$

hervorgeht, deren Wurzeln

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \pm 1 \qquad\qquad \cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \pm\frac{1}{2}$$

sind. Da im vorliegenden Falle sämmtliche vier abvickelbaren Normalflächen Symmetrieebenen des Strahlenbündels sind, indem für jedes Coordinatensystem $p = q = \partial^{31} = 0$ auch $\partial^{13} = 0$ ist, so können wir dieselbe Procedur in den vier verschiedenen Coordinatensystemen wiederholen. Die Wurzeln der ersten Categorie entsprechen dann den vier in den bezüglichen Symmetrieebenen verlaufenden Doppellinien, die der zweiten können in die Gleichung

$$\alpha = \beta + \frac{2n\pi}{3}$$

zusammengefasst werden, welche der das Conoid umkreisenden Doppellinie entspricht.

Im Falle $\Phi_{,} = \Phi_{,,}$ haben wir also vier Symmetrieebenen, welche Winkel von 45^0 mit einander bilden, und in den Conoiden gehen alle Strahlen durch jede der 5 Doppellinien. Von diesen beginnen je zwei, in orthogonalen Symmetrieebenen belegen, mit ihren beiden Zweigen in derselben Höhe, wonach sich alle acht Zweige einander und dem Hauptstrahl nähern, um diesen zu je vieren in zwei Punkten zu schneiden, wobei sich die beiden Zweige jeder Doppellinie kreuzen. Auf dem zwischen den beiden Schnittpunkten belegenen Theile des Conoides laufen die beiden gekreuzten Zweige jeder Doppellinie weiter, um sich im entgegenstehenden Schnittpunkte zu vereinigen, so dass dieser Theil 8 in den Normalflächen verlaufende Doppellinienzweige aufweist, welche die in halber Höhe verlaufende umkreisende Doppellinie schneiden.

Die diesem Typus angehörigen Fälle $\Phi_{,} \gtrless \Phi_{,,}$ unterscheiden sich von dem beschriebenen hauptsächlich dadurch, dass die Schnittcurven nicht dieselben Dimensionen in den beiden Symmetrieebenen zeigen sowie dadurch, dass der Uebergang von der Curvenform der Fig. 46 zu der der Fig. 48 durch die beiden in der Fig. 51 dargestellten Curventypen geschieht. Ausserdem tritt an Stelle der ebenen umkreisenden Doppellinie eine andere Erscheinung zu Tage, indem zwei der Doppelpunkte der der Fig. 48 entsprechenden Curve —

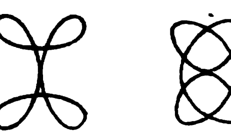


Fig. 51.

wie man aus der Fig. 51 ersehen kann — wenigstens anfänglich innerhalb des innersten Curvenraumes belegen sein müssen, und in den folgenden Schnitten weitere Doppelpunkte auftreten, welche einer fragmentarischen fünften Doppellinie angehören, wie sie wohl auch in dem Typus $\mathrm{tg}^2\vartheta > 2$ bezw. $\mathrm{tg}^2\vartheta < \frac{1}{2}$ beim Uebergang der Curvenform der Fig. 43 in der der Fig. 44 auftreten mag.

Um diese Untersuchung der Conoide mit den Resultaten betreffs der Evolute zu vergleichen, haben wir uns zunächst zu erinnern, dass eine Schnittlinie der Evolute mit der Fokalebene besteht, wenn eine Tangente der Schnittcurve des Conoides durch den Fokalpunkt geht. Wir haben gefunden, dass bei $\Phi_{,}\Phi_{,,} < 0$ immer zwei solche Schnittlinien vorhanden sind. Es muss dabei die Fokalebene eine Curve des Conoides abschneiden, welche zwischen der Form der Fig. 41 und der der Fig. 43 entsteht, oder zwischen den beiden Formen der Fig. 51 liegt. In beiden Fällen sehen wir unmittelbar, dass immer zwei und nur zwei Tangenten der Curve durch den Fokalpunkt gehen. Weiter wissen wir, dass bei $\Phi_{,}\Phi_{,,} > 0 \quad \Phi_{,}\Omega < 0$ keine Schnittlinie der Evolute mit der Fokalebene existirt, wenn $9\,\Omega^2 > \Phi_{,}\Phi_{,,}$ ist, d. h. wenn $\Phi_{,,,}$ und $\Phi_{,}$ entgegengesetzte Vorzeichen haben, während sonst vier vorhanden sind. In Uebereinstimmung hiermit finden wir, dass Curven von einer Form zwischen der der Fig. 43 und der der Fig. 44 sowie diejenigen von der Form der Fig. 48 oder die, welche eine Zwischenform zwischen der letzten der Fig. 51 und der der Fig. 49 aufweisen, keine durch den Hauptstrahl gehende Tangente haben können, während die Curven, deren Form zwischen denen der Figg. 44 und 45 bezw. 49 und 50 liegt, immer vier solche Tangenten haben. Bleibt also der Fall $\Phi_{,}\Phi_{,,} > 0 \quad \Phi_{,}\Omega > 0$, wobei $\Phi_{,}\Omega_{,,,} \gtrless 0$ sein kann, $\Phi_{,}\Phi_{,,,}$ aber immer grösser als Null ist. Für diesen Fall haben wir gefunden, dass bei $\Phi_{,}\Phi_{,,} > \Omega^2$ keine, im entgegengesetzten Falle aber vier Schnittlinien der Evolute mit der Fokalebene vorhanden sind, sowie dass bei $\Phi_{,}\Omega_{,,,} \leqq 0$ immer $\Phi_{,}\Phi_{,,} < \Omega^2$ ist. In Uebereinstimmung mit der letzten Angabe finden wir, dass die Schnittcurven eine Form haben müssen, welche zwischen der der Fig. 46 und der ersten der Fig. 51 liegt, und welche immer vier durch den Hauptstrahl gehende Tangenten zulässt. Bei $\Phi_{,}\Omega_{,,,} > 0$ aber liegt die form der Schnittcurven zwischen der kreisförmigen und der der Fig. 41 bezw. der, welche die Fig. 46 bei $\Phi_{,} \gtrless \Phi_{,,}$ aufweisen würde. Hier können wir die Untersuchungen der Evolute nicht mehr mit denen des Conoides vergleichen, sondern müssen uns mit der Kenntniss begnügen, dass bei $\Phi_{,}\Phi_{,,} < \Omega^2$ die fragliche Schnittlinie der Fokalebene mit dem Conoide vier durch den Fokalpunkt gehende Tangenten aufweist.

Ebenso wie beim astigmatischen Strahlenbündel und auf dieselbe Weise finden wir, dass die Bedingung für die Existens eines Conoides

$$dx^2 + \varepsilon dy^2 = dR^2\,,$$

dessen Schnitte mit zur Tangentialebene parallelen Ebenen Ellipsen darstellen,

$$\varepsilon = \frac{3\,\Omega}{\Phi_{,}} = \frac{\Phi_{,,}}{3\,\Omega} \qquad \varepsilon > 0$$

ist. Dieser Bedingung kann also nur bei Strahlenbündel mit nur zwei Hauptschnitten genügt werden. Im Grenzfalle $\Phi_{,} = \Phi_{,,} = 3\,\Omega$ sind sie Umdrehungsflächen und das Conoid ist von der Form $dx^2 + dy^2 = dR^2$.

Wenn wir den Begriff der *dünnsten Querschnitte* auf ein anastigmatisches Strahlenbündel mit zwei Symmetrieebenen anwenden wollen, so können wir darunter allgemein nur die engsten Stellen der Schnitte des Strahlenbündels mit den abwickelbaren Normalflächen verstehen. Für diese gelten die bei der Untersuchung des astigmatischen Strahlenbündels gefundenen Werthe, welche die Ausdrücke

$$\zeta = \frac{1}{r} - \frac{R^2\Phi}{8r^2} \qquad \xi = \pm\frac{R^3\Phi}{24r}$$

bei Einsetzen von $\Phi_{,}, \Phi_{,,}$ bezw. $\Phi_{,,,}$ geben. In dem in praktischer Hinsicht wichtigsten Falle $\Omega\,(\Phi - \Omega) > 0$ wird, um das beste optische Bild zu erhalten, bei Vorhandensein von nur zwei Hauptschnitten die kleinste der Grössen $\Phi_{,}, \Phi_{,,}$, bei vier Hauptschnitten aber die kleinste der Grössen $\Phi_{,}, \Phi_{,,}\, \Phi_{,,,}$ anzuvenden sein. Bei $\Phi_{,} > \Phi_{,,} > 0$ zeigt also die Schnittfigur einen Abschnitt der Evolute, von welchem bei $3\,\Omega > \Phi_{,} > 0$, wobei $\Phi_{,,,} > \Phi_{,}$ ist, zwei Partien mit schlingenähnlicher Form ausgehen. Dasselbe findet bei $\Phi_{,} > 3\,\Omega > \Phi_{,,}$ statt, aber bei $\Phi_{,,} > 3\,\Omega$, wobei auch $\Phi_{,,} > \Phi_{,,,}$ ist, bildet die Schnittfigur einen Theil der Evolute, welcher in der Richtung der beiden Hauptschnitte von vier Partien mit schlingenähnlichen Begrenzungslinien überragt wird. Offenbar sind diese Strahlenbündel für eine optische Abbildung günstiger als die anderen da der kleinste Zerzstreuungskreis hierbei nach vier Richtungen vollständig abgegrenzt ist, während dies sonst nur nach zwei Seiten hin geschieht. Bei $\Phi_{,} = \Phi_{,,}$ entsteht immer diese vierstrahlige Figur des dünnsten Querschnittes, und zwar sind die die Evolute überragenden Partien bei $\Phi_{,} \gtrless 3\,\Omega \gtrless 0$ in den Coordinatenebenen orientirt, bei $3\,\Omega \gtrless \Phi_{,} \gtrless 0$ aber in den beiden anderen Symmetrieebenen. Sie entsprechen also immer denjenigen Kanten der Evolute, welche in der Richtung der Normale von der Wellenfläche weg schauen. Im Falle $\Phi_{,} = \Phi_{,,} = 3\,\Omega$ hat die Wellenfläche eine Berührung vierter Ordnung mit einer Umdrehungsfläche, und es kann dann eine beliebige Zahl solcher Kanten

vorhanden sein, was von Ableitungen höherer Ordnung abhängt. Wie wir uns erinnern, schaut von diesen Kanten jede zweite in der Richtung der Normale von der Wellenfläche weg, und es müssen also eben so viele Ausbuchtungen auf dem dünnsten Querschnitte vorhanden sein, wie der entsprechende Durchschnitt der Evolute Spitzen der bezüglichen Categorie hat.

Nach dieser Beschreibung der anastigmatischen Strahlenbündel, auf welche wir dieselbe Eintheilung anwenden, wie auf die astigmatischen, haben wir nur wenig über die einzelnen Formen hinzuzufügen.

Betreffs der *ersten Form*, der *mit zwei Symmetrieebenen*, wollen wir jedoch an die von dem Kreispunktstypus unabhängige Bedeutung der Differenz $\Phi_{,} - \Phi_{,,}$ einerseits, der Grösse des Winkels ϑ andererseits erinnern. Wenn jene allein zum Vorschein kommt, d. h. bei Vorhandensein von nur zwei Hauptschnitten, verleiht sie dem Strahlenbündel Eigenschaften, welche denen der astigmatischen ähneln, wie wir es insbesondere an der Form der Querschnitte der Conoide und des Strahlenbündels sehen. Wenn ein Auge, in welchem das auf die Netzhaut fallende Strahlenbündel von dieser Form ist, nach der gewöhnlichen auf der Form der dünnsten Querschnitte basirenden Methode untersucht wird, so muss es einen regulären Astigmatismus vortäuschen. Wir nennen deshalb die Differenz $\pm (A_{,} - A_{,,})$ den *Astigmatismus der Aberration* und sagen von einem Strahlenbündel, für welches diese Differenz nicht gleich Null ist, dass es eine *astigmatische Aberration* hat. Anderseits finden wir bei $\Phi_{,} = \Phi_{,,}$, dass die Eigenschaften des Strahlenbündels nur von der Differenz $\Phi_{,} + \Phi_{,,} - 6\Omega$ abhängen. Diese können aber auf einen Gegensatz zwischen den Erscheinungen in den diagonalen und in den mit den Coordinatenebenen zusammenfallenden Symmetrieebenen zurückgeführt werden. Wir nennen deshalb die Differenz $\pm (A_{,} + A_{,,} - 6C)$ den *Diagonalastigmatismus der Aberration* und sprechen von der *diagonalastigmatischen Aberration* des betreffenden Strahlenbündels. Die Quote der beiden Differenzen giebt den Winkel zwischen den Hauptschnitten durch die leicht zu erhaltende Beziehung:

$$\cos 2\vartheta = \frac{A_{,,} - A_{,}}{A_{,} + A_{,,} - 6C}$$

Wir sehen, dass, wenn der Astigmatismus der Aberration numerisch grösser als der Diagonalastigmatismus ist, nur zwei Hauptschnitte vorhanden sind, und der Charakter des Strahlenbündels vorwiegend von jenem abhängt, sowie dass die von der diagonalastigmatischen Aberration abhängigen Eigenschaften des Strahlenbündels in den Vordergrund treten, wenn der Diagonalastigmatismus numerisch mehr als das dreifache des Astigmatismus der Aberration beträgt, welchem Sachverhalt die Beziehung $2 > \mathrm{tg}^2 \vartheta > \frac{1}{2}$ entspricht.

Für die Werthe $A, A_{\prime\prime}, C$ behalten wir die beim allgemeinen Strahlenbündel eingeführten Bezeichnungen bei, aber da die transversale Aberration in beiden Hauptrichtungen dieselbe ist, so kann füglich auch die Benennung *Diagonalaberration* für C angewendet werden, und es wird kein Missverständniss daraus resultiren, wenn $A, A_{\prime\prime}$ schlechthin als Masse der *Aberration in den beiden Hauptschnitten* bezeichnet werden.

Im allgemeinen anastigmatischen Strahlenbündel, für welches nicht sämmtliche Differentialquotienten dritter Ordnung in der Gleichung der Wellenfläche verschwinden, wählen wir für die Orientirung des Strahlenbündels in den Fällen, wo die Evolute die Fokalebene schneidet, immer diejenige Haupttangente als X-Achse, welche die beiden kleinsten der Winkel ω trennt. Wenn keine Schnittlinie der Evolute mit der Fokalebene vorhanden ist, wählen wir, falls eine Linie $u = 0$ mit einer Haupttangente zusammenfällt, diese als X-Achse. Ist das nicht der Fall, so ist es gleichgiltig, welche von den drei Haupttangenten gewählt wird.

Unter dieser Voraussetzung finden wir die Bedingungen dafür, dass das Strahlenbündel von der *zweiten Form* der *mit einfacher Asymmetrie*, ist, d. h. eine Symmetrieebene hat, in den Beziehungen $\lambda'' = B' = B' = 0$. Da nur ein Hauptschnitt in Frage kommt, so ist R' einfach als die direkte Asymmetrie, $\lambda' R'$ als die transversale zu bezeichnen — man beachte, dass der Ausdruck — $E\,\mathrm{tg}\,\vartheta_{\prime\prime}$ für das astigmatische Strahlenbündel identisch mit $\lambda' R'$ ist — und es ist λ' der *Asymmetriencoefficient,* welcher die Form des Strahlenbündels bestimmt. Wir erinnern uns, dass bei $\lambda'(1 - \lambda') > 0$ der umbiegende, bei $\lambda_{\prime}(1-\lambda_{\prime}) < 0$ der ausbiegende Krümmungslinientypus auf der Wellenfläche vorkommt, dass in jenem Falle der Evolutenwinkel kleiner, in diesem grösser als $\frac{\pi}{2}$ ist, dass bei $\lambda' = 0$ die YZ-Ebene einen Hauptschnitt, obwohl keine Symmetrieebene darstellt, dass bei $\lambda' = 1$ die zwei anderen Haupt-

schnitte Winkel von 45⁰ mit der XZ-Ebene bilden, sowie dass bei $R' = 0$ $\lambda' = \infty$ die Evolute die Fokalebene in einer einzigen Linie schneidet, und können die Bedeutung des Asymmetriencoefficientes noch weiter durch folgenden aus dem S. 97 angegebenen Werthe leicht herzuleitenden Ausdruck für die Grösse des Evolutenwinkels illustriren:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2\sqrt{\lambda'}}{1 - \lambda'} .$$

Dass der Werth von A' genau wie im astigmatischen Strahlenbündel das Mass der direkten Aberration darstellt, haben wir schon S. 126 erwähnt. Als Mass der transversalen Aberration — wobei nur der in die XZ-Ebene fallende Hauptschnitt in Frage kommt — können wir auch C betrachten, obwohl diese Grösse nicht genau der Grösse C'' im astigmatischen Strahlenbündel entspricht. Dagegen können wir keinen so einfachen Ausdruck für die Bedeutung des Werthes A' finden, sondern müssen uns damit begnügen, seine Bedeutung für die laterale Aberration des einzelnen Strahles und für die geometrischen Eigenschaften der übrigen abwickelbaren Normalflächen zu kennen.

Für die anastigmatischen Strahlenbündel der *dritten Form,* der *mit doppelter Asymmetrie,* haben wir noch den zweiten Asymmetriencoefficienten λ'' in Rechnung zu ziehen. Gemäss unseren Voraussetzungen kann bei dieser Form niemals $\lambda' = 0$ sein; die im Falle $\lambda' = 1$ vorhandenen orthogonalen Hauptschnitte sind nicht symmetrisch zu der XZ-Ebene orientirt; endlich gilt für den Evolutenvinkel:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\sqrt{\lambda''^2 + 4\lambda'^3}}{\lambda'(1 - \lambda')} .$$

Im übrigen gilt von den Werthen $\lambda'(1 - \lambda')$ R' A' C A' das eben von der zweiten Form Gesagte. Auch betreffend den Werthen B' und B' begnügen wir uns mit ihrer Bedeutung für die laterale Aberration eines einzelnen Strahles, obwohl ersterer durch seine Bedeutung für die geodätische Krümmung der die X-Achse berührenden Hauptkrümmungslinie ausgedrückt werden könnte. Die Strahlenbündel, für welche $\lambda'' = 0$ ist, bilden den Uebergang zu denen der zweiten Form, indem ihre zweite Asymmetrie nur von den Grössen B' B' abhängt. Den Uebergang zu der ersten Form finden wir andererseits bei den Strahlenbündeln, für welche sämmtliche Differentialquotienten dritter Ordnung

in der Gleichung der Wellenfläche verschwinden, aber in keinem der Coordinatensysteme $p = q = \partial^{31} = 0$ die Bedingung für einen orthogonalen Hauptschnitt $\partial^{13} = 0$ erfüllt ist. Diese können aber, wie wir gesehen haben, keine anderen Haupttypen aufweisen als die der ersten Form, obwohl die von der doppelten Symmetrie abhängigen Eigenschaften verloren gehen.

Für die *Strahlenbündel mit unendlich kleinem Astigmatismus* d. h. solche, in welchen die Brennstrecke von derselben Grössenordnung wie der Diameter der Blende ist, finden wir leicht die Constitution mit Hilfe der im vorigen Capitel durchgeführten Untersuchung der Flächenelemente, für welche im Coordinatensysteme $p = q = s = 0$ die Differenz $r - t$ einen unendlich kleinen Werth hat, ohne gleich Null zu sein. Wir haben gesehen, dass bei Vorhandensein einer Symmetrieebene, welche wir in die XZ-Ebene verlegen, immer ein Kreispunkt sich in unendlich kleiner Entfernung befindet, wenn $U - W$ einen endlichen Werth hat, und wir haben die Formeln gefunden, nach welchen der Ort dieses Kreispunktes bestimmt wird. Im gegebenen Falle ist es also eine leichte Sache zu berechnen, ob dieser Kreispunkt innerhalb des Wellenflächenelementes des Strahlenbündels sich befindet oder nicht. Im ersten Falle erhalten wir die Evoluten aus den Evoluten der betreffenden Kreispunkte, wobei wir nur zu beachten haben, dass die Schnitte, welche zur Tangentialebene parallel sind, nicht parallel zur Fokalebene des Kreispunktes stehen, sowie dass das Strahlenbündel auf der einen Seite seiner Fokalebene einen grösseren Theil der Evolute enthält als auf der anderen. In Uebereinstimmung hiermit treten auch die für das anastigmatische Strahlenbündel charakteristischen Conoiddoppellinien auf, obwohl excentrisch belegen. Wenn man die Durchschnitte des Conoides mit den verschiedenen zur Fokalebene parallel gelegten Ebenen punktweise construirt, so findet man, wenn die Brennstrecke nicht zu klein ist im Verhältniss zu der Öffnung des Strahlenbündels und zu den Ableitungen der Hauptkrümmungen der Wellenfläche, keine anderen Doppelpunkte als diejenigen, welche den beiden, dem astigmatischen Strahlenbündel eigenthümlichen Conoiddoppellinien entsprechen, wenn man aber die letzgenannten Werthe und die Öffnung des Strahlenbündels im Verhältniss zu der Brennstrecke grösser wählt, erschei-

nen, wie erwähnt, die für das anastigmatische asymmetrische Strahlenbündel charakteristischen Conoiddoppellinien. In einer früheren Arbeit habe ich die Doppelpunkte der Conoidquerschnitte für beide Fälle an solchen punktweise construirten Figuren gezeigt und entsprechende Strahlenbündelquerschnitte photographisch abgebildet. Für die praktisch nöthige Kenntniss eines solchen Strahlenbündels mag es nicht überflüssig sein, daran zu erinnern, dass die Normalengleichungen, welche durch Entwickeln nach Potenzen von x und y bezw. p und q erhalten werden, unverändert bleiben. Für die lateralen Aberrationen eines Strahles finden wir demnach bei Anwendung dieser Variabelen dieselben Werthe wie sonst, während betreffs der longitudinalen Aberrationen das über die anastigmatischen Strahlenbündel Gesagte gilt, weil die zweite abwickelbare Normalfläche eine unendlich grosse Krümmung besitzt. Da $v = 0$ ist, so gelten für die $s_{,}$-Linie der $s_{,}$-Schale die allgemeinen für das astigmatische und das anastigmatische Strahlenbündel mit einfacher Asymmetrie gemeinsamen Ausdrücke und für die $s_{,}$-Linie der $s_{,,}$-Schale, d. h. ihre Kantlinie, die aus den allgemeinen Formeln der Evolute S. 17 nach Uebergang auf die unabhängigen Variabelen xy erhaltenen Ausdrücke

$$\zeta = \frac{1}{D_{,,}} \qquad d\zeta = -\frac{W}{D_{,,}^2}\,dx$$

$$d^2\zeta = -\frac{1}{D_{,,}^2}\left\{\Omega'' + D_{,}D_{,,}(D_{,} - D_{,,}) - \frac{2W^2}{D_{,,}}\right\}dx^2$$

welche bei $v = 0$ keine unendlich grossen Werthe enthalten und bei $D_{,} - D_{,,} = 0$ unmittelbar in die für die t-Linie der betreffenden abwickelbaren Normalfläche des Kreispunktsnormalenbündels geltenden Werthe übergehen. Da die Punkte, in welchen diese Kantlinie das Grenzconoid des Strahlenbündels schneidet, mit den Anfangspunkten der Doppellinien auf der Conoidoberfläche zusammenfallen, so erhalten wir auf diese Weise diejenigen Querschnitte des Strahlenbündels, welche in der XZ-Ebene liegende Spitzen aufweisen, und können also leicht die Kantlinie construiren, da wir ausser diesen beiden Punkten noch einen dritten, den zweiten Fokalpunkt, kennen. Die entsprechenden Ausdrücke für die erste Doppellinie können wir nicht erhalten, wofern nicht $W = 0$ ist, da weder die Ausdrücke für die Evolute anwendbar sind, noch die bei den Kreispunkten angewendete Methode zum Ziel führt. Für die Kenntniss des Strahlenbündels wäre auch diese Doppellinie von unter-

geordneter Bedeutung, da ihre Endpunkte auf der Conoidoberfläche bei endlichem Werthe von U keinen Spitzen auf der Schnittlinie der Begrenzungsfläche des Strahlenbündels mit der bezüglichen zur Fokalebene parallelen Ebene entsprechen, weil die Evolute, auf welcher diese Endpunkte belegen sind, eine Schnittlinie mit der nämlichen Ebene hat.

Für die vier Querschnitte, welche ausser den beiden Fokalebenen die Brennstrecke eines Strahlenbündels mit einfacher Asymmetrie und unendlich kleinem Astigmatismus charakterisiren, haben wir also in den Gleichungen

$$\zeta' = \frac{1}{D_{\prime}} - x \cdot \frac{U}{D_{\prime}^2} - \frac{x^2}{2 D_{\prime}^2}\left(\Phi' - \frac{2 U^2}{D_{\prime}}\right)$$

$$\zeta'' = \frac{1}{D_{\prime\prime}} - x \cdot \frac{W}{D_{\prime\prime}^2} - \frac{x^2}{2 D_{\prime\prime}^2}\left(\Omega'' + D_{\prime} D_{\prime\prime}(D_{\prime} - D_{\prime\prime}) - \frac{2 W^2}{D_{\prime\prime}}\right)$$

für ein Conoid $x^2 + y^2 = R^2$ das eine Mal x durch $+R$, das andere Mal durch $-R$ zu ersetzen. Diese Gleichungen, welche, wie wir gesehen haben, für alle Strahlenbündel mit wenigstens einer Symmetrieebene vollkommen unabhängig vom Grade des Astigmatismus giltig sind, geben uns die Endpunkte der Schnittlinien der beiden Evoluten mit der XZ-Ebene. Im astigmatischen Strahlenbündel ist nun der Unterschied zwischen den zwei Werthen von ζ', sowie der zwischen den beiden Werthen von ζ'' unendlich klein im Verhältniss zur Differenz $\zeta' - \zeta''$; wenn aber die Brennstrecke von derselben Grössenordnung ist wie die Öffnung des Strahlenbündels, sind auch sämmtliche genannten Differenzen von einer und derselben Grössenordnung. Während also in ersterem Falle niemals Schnittlinien der beiden Evoluten auf einem und demselben Querschnitte des Strahlenbündels vorkommen können, ist dies in letzterem Falle die Regel. Da es unnöthig erscheint, die keine Schwierigkeiten bietende Diskussion auf alle mögliche Fälle auszudehnen, wollen wir uns hier auf die für die Ophthalmologie und wohl auch für die Optik im allgemeinen wichtigsten Fälle $w(u-w) > 0$ beschränken.

Da die Brennstrecke von derselben Grössenordnung wie der Durchmesser der Begrenzungslinie des Strahlenbündels auf der Wellenfläche ist, und da wir die Werthe $\zeta' \zeta''$ nur bis zur zweiten Potenz von x entwickeln können, so ist das Glied $D_{\prime} D_{\prime\prime}(D_{\prime} - D_{\prime\prime})$ in der Gleichung für ζ'' wegzulassen, und es ist bis auf unendlich kleine Grössen

höherer Ordnung $\frac{x^2}{D_,^2}$ gleich $\frac{x^2}{D_{,,}^2}$. Für die Differenz $\zeta'' - \zeta'$ erhalten wir:

$$\zeta'' - \zeta' = \frac{1}{D_{,,}} - \frac{1}{D_,} + x\left(\frac{U}{D_,^2} - \frac{W}{D_{,,}^2}\right) + \frac{x^2}{2D_,^2}\left(\Phi' - \Omega'' - \frac{2(U^2 - W^2)}{D_,}\right).$$

Die Bedingung dafür, dass innerhalb des Strahlenbündels eine Kreispunktsnormale vorkommt, ist, dass die Gleichung $\zeta'' - \zeta' = 0$ einen Werth von x giebt, welcher numerisch kleiner als R ist. Wenn wir $D_{,,}$ durch $D_,$ und $(D_, - D_{,,})$ ersetzen, ergiebt sich nach Multiplication mit $D_, D_{,,}$

$$D_, - D_{,,} + x(U - W) + \frac{x^2}{2}(\Phi' - \Omega'') - \frac{x^2}{D_,}(U^2 - W^2) -$$

$$- x(D_, - D_{,,})\left(\frac{U}{D_,} + \frac{W}{D_{,,}}\right) = 0$$

in welchem Ausdrucke wir die im letzten Gliede enthaltene Differenz $D_, - D_{,,}$ durch $-x(U - W)$ ersetzen können, da diese Werthe laut der Gleichung selbst nur um unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung differiren, wonach sich die beiden letzten Glieder ausgleichen, und die im vorigen Capitel gefundene Bedingungsgleichung für die Existenz eines Kreispunktes in der Nähe eines Flächenpunktes mit unendlich kleiner Differenz der Hauptkrümmungen wieder erhalten wird. Bei endlichem Werthe von $U - W$ giebt uns diese Gleichung den ersten Annäherungswerth:

$$x = -\frac{D_, - D_{,,}}{U - W}$$

mit welchem wir uns begnügen, da das zweite Glied, welches $(D_, - D_{,,})^2$ enthält, den Ausdruck für ζ' bezw. ζ'' unbequem macht. In der ersten Annäherung sind diese Ausdrücke für die zur Fokalebene parallele Ebene, welche den Krümmungsmittelpunkt des Kreispunktes enthält,

$$\zeta' = \zeta'' = \frac{1}{D_,} + \frac{D_, - D_{,,}}{D_,^2} \cdot \frac{U}{U - W} = \frac{1}{D_{,,}} + \frac{D_, - D_{,,}}{D_{,,}^2} \cdot \frac{W}{U - W}.$$

Wenn wir nun, indem wir uns mit der ersten Annäherung begnügen und die Krümmungsdifferenz $D_, - D_{,,}$ sowohl wie die Ableitungen der Hauptkrümmungen positiv wählen, die successiven zur

Tangentialebene parallelen Schnitte des Strahlenbündels von der Wellenfläche aus verfolgen, so finden wir den Anfang der Brennstreke bei $\zeta = \frac{1}{D_{,}} - \frac{RU}{D_{,}^2}$, wo die auf der XZ-Ebene vertikal stehende, negativ gekrümmte, auf der Seite positiver X des centralen Strahles belegene Schnittlinie der ersten Evolutenschale zu erscheinen anfängt. In den weiteren Schnitten nimmt diese Schnittlinie der Evolute einen immer grösseren Theil der Begrenzungslinie des Querschnittes des Strahlenbündels ein, während der entsprechende Theil der Schnittlinie des Grenzconoides sich immer mehr von der Evolutenschnittlinie entfernt und dem gegenüberliegenden Theile der Begrenzungslinie des Strahlenbündelquerschnittes nähert, bis sich die beiden Curventheile bei $\zeta = \frac{1}{D_{,}}$ berühren. Bei $\zeta = \frac{1}{D_{,,}} - \frac{RW}{D_{,,}^2}$ bildet der auf diese Weise hinübergeschobene Theil der Schnittlinie des Grenzconoides eine nach der Richtung negativer X schauende, in der XZ-Ebene belegene Spitze, den Anfangspunkt der Kante der zweiten Evolutenschale. Je nachdem also $RW \gtrless D_{,} - D_{,,}$ ist, erscheint diese Spitze, bevor die erste Fokalebene erreicht wird, wobei die Kante innerhalb des Strahlenbündelquerschnittes beginnt, oder erst nachher, wobei die Spitze auf der Begrenzungslinie des Strahlenbündelquerschnittes liegt, und die Kante auf der Oberfläche beginnt. Im ersten Falle hat die Schnittlinie des Grenzconoides schon zwei Doppelpunkte bei $\zeta = \frac{1}{D_{,}}$ und die folgenden Schnitte zeigen drei Doppelpunkte, während in letzterem die zwischen $\zeta = \frac{1}{D_{,}}$ und $\zeta = \frac{1}{D_{,,}} - \frac{RW}{D_{,,}^2}$ fallenden Schnitte zwei und erst die folgenden drei Doppelpunkte zeigen. Die der Ebene $\zeta = \frac{1}{D_{,,}} - \frac{RW}{D_{,,}^2}$ folgenden Schnitte zeigen die Schnittlinie der ersten Schale und der Kante der zweiten, letztere in der Form einer nach der ersteren zu schauenden Spitze. In den weiteren Schnitten verkleinert sich der Krümmungsradius der Schnittlinie mit der ersten Schale in ihrem Schnittpunkte mit der XZ-Ebene, und die Schnittlinie mit der Kante, von welcher immer mehr sichtbar wird, nähert sich ihr mit ihrer Spitze, welche bei $\zeta = \frac{1}{D_{,,}}$ den centralen Strahl trifft, bis bei $\zeta = \frac{1}{D_{,}} + \frac{D_{,} - D_{,,}}{D_{,}^2} \frac{U}{U - W} = \frac{1}{D_{,,}} + \frac{D_{,} - D_{,,}}{D_{,,}^2} \frac{W}{U - W}$ die Ebene

den Krümmungsmittelpunkt des Kreispunktes trifft. Es bildet hierbei die Schnittlinie der ersten Schale eine Spitze mit zwei Tangenten, welche auch Tangenten der Schnittlinie mit der Kante der zweiten Schale sind. Jenseits dieser Ebene finden wir wieder eine auf der Seite positiver X des centralen Strahles belegene, negativ gekrümmte Evolutenschnittlinie, deren Krümmungsradius im Schnittpunkte mit der XZ-Ebene immer mehr zunimmt, welche aber jetzt der zweiten Schale angehört, während die erste Schale jetzt eine Kante bildet, deren Schnittlinie als gegen die andere Schale gewendete Spitze erscheint. Die beiden Schnittlinien der Evolutenschalen entfernen sich von einander, und bei $\zeta = \frac{1}{D_{\prime\prime}} + \frac{RW}{D_{\prime\prime}^2}$ verschwindet die Schnittlinie der Kante innerhalb der Begrenzungslinie des Strahlenbündelquerschnittes, wobei im bezüglichen Punkte die Schnittlinie des Grenzconoides eine nach der Richtung negativer X schauende Spitze aufweist. In den folgenden Schnitten nähert sich der betreffende Theil der Schnitllinie des Grenzconoides immer mehr der eine immer schwächere Krümmung aufweisenden Evolutenschnittlinie, bis bei $\zeta = \frac{1}{D_{\prime}} + \frac{RU}{D_{\prime}^2}$ beide zusammenfallen, und die letzte Spur der Evolute als ein Zeichen des Aufhörens der Brennstrecke sichtbar ist.

Wenn $R < \frac{D_{\prime} - D_{\prime\prime}}{U - W}$ ist, so fällt kein Kreispunkt innerhalb der Begrenzungslinie des Strahlenbündels auf der Wellenfläche, es findet sich auf den Querschnitten des Strahlenbündels kein Berührungspunkt zwischen den Schnittlinien der beiden Evoluten und in der bezüglichen Schnittserie des Strahlenbündels wird die Ebene $\zeta = \frac{1}{D_{\prime}} + \frac{RU}{D_{\prime}^2}$, in welcher die letzte Spur der ersten Evolute zu sehen ist, früher angetroffen als die Ebene $\zeta = \frac{1}{D_{\prime\prime}} + \frac{RW}{D_{\prime\prime}^2}$, in welcher die Schnittlinie mit der Kante der zweiten Evolute aufhört. Die entsprechende Spitze der Schnittlinie des Grenzconoides kommt dann auf der Begrenzungslinie des Strahlenbündelquerschnittes zu liegen und schaut nach der Richtung positiver X, was auf dieselbe Weise bewiesen wird wie beim Strahlenbündel des Kreispunktsflächenelementes. Ist dabei $R < \frac{D_{\prime} - D_{\prime\prime}}{W}$, so liegt, wie wir gesehen haben, auch die andere in der XZ-Ebene fallende Spitze der bezüglichen Schnittlinie mit dem Grenzconoide auf der Be-

grenzungslinie des Strahlenbündelquerschnittes, und es verläuft mithin die zweite Doppellinie des Conoides ganz wie im allgemeinen astigmatischen Strahlenbündel.

Bei $R < \frac{D_{\prime} - D_{\prime\prime}}{U}$ hat auf der Schnittserie die Schnittlinie der ersten Evolutenschale aufgehört, bevor die zweite Fokalebene erreicht wird, und bei $R < \frac{D_{\prime} - D_{\prime\prime}}{U + W}$ giebt es keine Schnitte des Strahlenbündels mehr, welche Schnittlinien der beiden Evoluten enthalten, es können also die beiden Doppellinien des Conoides nicht auf demselben Schnitte zum Vorschein kommen, d. h. auf den Schnittlinien des Grenzconoides finden sich niemals mehr als zwei Doppelpunkte vor.

Nach eben derselben Methode kann die Diskussion der Fälle $w(u - w) < 0$ durchgeführt werden. Da aber solche Strahlenbündel nicht im Auge vorzukommen scheinen, und auch bei excentrischer Brechung in centrirten optischen Systemen sowie bei Brechung in schiefgestellten Linsen, wie ich früher gezeigt habe, nur ganz ausnahmsweise entstehen, soll die Diskussion hier nicht weiter geführt werden.

Es ist eine leichte Sache, die verschiedenen diskutirten Strahlenbündel optisch zu erzeugen. Bekanntlich erhält man bei Brechung durch schiefgestellte Linsen ein astigmatisches Strahlenbündel, von dessen Asymmetrie ich gezeigt habe, dass, wenn die Linse planconvex mit der ebenen Fläche dem Lichte zugewendet, und der leuchtende Punkt nicht zu nahe der Linse belegen ist — eine Distanz, welche zwei oder drei mal die Brennweite der Linse beträgt, genügt bei nicht allzu schräger Stellung — die Bedingung $w(u-w) > 0$ erfüllt ist. Durch Hinzufügen einer Cylinderlinse, deren ebene Fläche an die entsprechende der Linse angelegt wird, kann nun der Astigmatismus beliebig verändert werden, während die Öffnung und die Asymmetrienwerthe des gebrochenen Strahlenbündels nicht merklich beeinflusst werden, wonach sämmtliche beschriebenen Formen der Strahlenbündel leicht zu erhalten sind. So bekommt man z. B. mit einer combinirten Linse $+ 10{,}0 \supset + 3{,}0$ c., wenn die cylindrische Fläche dem leuchtenden Punkte zugewendet ist, und die Schiefstellung durch Drehung der Linse um eine auf der Cylinderachse senkrechte Achse bewirkt wird, bei nicht zu starker Schiefstellung ein Strahlenbündel, welches eine Kreispunktsnormale enthält, die sich bei stärkerer Schiefstellung immer mehr der Peripherie nähert, indem dabei der Astigmatismus zu-, die Asymmetrie

abnimmt, und wenn die Schiefstellung durch Drehung um die Cylinderachse bewirkt wird und so gross ist, dass kein Punkt $U = 0$ auf der Wellenfläche des Strahlenbündels vorhanden ist, ein typisches Strahlenbündel mit einfacher Asymmetrie, dessen beide Evoluten Schnittlinien auf denselben Querschnitten des Strahlenbündels zeigen, ohne dass ein Berührungspunkt irgendwo zwischen ihnen vorkommt. Diese Experimente zeigen in allen Details die oben deducirten Erscheinungen, welche sehr leicht zu constatiren sind, da nicht nur die heller erscheinenden Schnittlinien der Evoluten, sondern auch die, verschieden helle Partien abgrenzenden, Schnittlinien des Grenzconoides ohne Schwierigkeit zu erkennen sind.

Wenn im letzterwähnten Experimente die Schiefstellung gering ist, so enthält die innerhalb der Begrenzungslinie des Strahlenbündels belegene Partie der Wellenfläche, wie gesagt, einen Punkt $U = W = 0$, welcher sich dadurch kundgiebt, dass die erste Evolutenschale zwar in den ersten Schnitten der oben befolgten Serie nur eine Schnittlinie zeigt, in den folgenden aber zwei, welche sich schliesslich in einer geraden Linie, der dem Punkte $U = W = 0$ entsprechenden Kante, vereinigen, wonach in den folgenden Schnitten des Strahlenbündels diese Evolutenschale keine weiteren Schnittlinien aufweist. Solche Strahlenbündel, auf deren Bedeutung für die Correction des Astigmatismus des Auges in einem folgenden Capitel näher eingegangen werden soll, haben also in der That zwei Symmetrieebenen, obwohl diese nicht den centralen Strahl schneiden.

Wenn die Brennstrecke des Strahlenbündels von derselben Grössenordnung wie das Quadrat des Durchmessers der Begrenzungslinie auf der Wellenfläche und dabei $U - W$ unendlich klein oder gleich Null ist, während $\Phi' - \Omega''$ einen endlichen Werth hat, so können, wie wir gesehen haben, zwei Kreispunkte auf der Wellenfläche innerhalb der Begrenzungslinie des Strahlenbündels vorhanden sein, und wenn nicht nur die Differenz der Asymmetrienwerthe, sondern auch diese selbst unendlich klein sind, so kann ein Strahl vorkommen, welcher von zwei Symmetrieebenen des Strahlenbündels geschnitten wird, wie es bei Verschwinden sämmtlicher Asymmetrienwerthe mit dem centralen Strahl der Fall ist. Ohne sämmtliche diese Fälle zu diskutiren, wollen wir uns den Strahlenbündeln mit zwei Symmetrieebenen, welche den Hauptstrahl enthalten, zuwenden und dabei wieder die praktisch wichtigsten Formen $\Omega(\Phi - \Omega) > 0$ näher untersuchen. Wenn diese Bedingung längs den beiden Hauptkrümmungslinien der Wellenfläche erfüllt

ist, so finden sich, wie wir gesehen haben, immer zwei Kreispunkte in der Nähe, welche bei positiven Aberrationswerthen und negativem Werthe der Differenz $D_{\prime} - D_{\prime\prime}$ auf der ersten Hauptkrümmungslinie belegen sind und bei $R^2 \geqq \frac{2(D_{\prime\prime} - D_{\prime})}{\Phi' - \Omega''}$ innerhalb bezw. auf der Begrenzungslinie des Strahlenbündels liegen und in der Ebene

$$\zeta = \frac{1}{D_{\prime}} - \frac{D_{\prime\prime} - D_{\prime}}{D_{\prime}^2} \cdot \frac{\Phi'}{\Phi' - \Omega''} = \frac{1}{D_{\prime\prime}} - \frac{D_{\prime\prime} - D_{\prime}}{D_{\prime\prime}^2} \cdot \frac{\Omega''}{\Phi' - \Omega''}$$

angetroffen werden. Aus schon erwähnten Gründen ist die Differenz $\Omega' - \Omega''$ zu vernachlässigen, wonach wir beide Werthe mit Ω bezeichnen. Für die Untersuchung der gewöhnlichen Schnittserie des Strahlenbündels reichen die durch die Gleichungen S. 153 bestimmten Werthe von ζ' und ζ'' nebst den Fokalebenen und der Ebene, welche die Fokalpunkte der Kreispunkte enthalten, völlig aus. Wenn in einem solchen Strahlenbündel bei positiven Aberrationswerthen und negativem Werthe von $D_{\prime} - D_{\prime\prime}$ die gewöhnliche Schnittserie des Strahlenbündels verfolgt wird, so treffen wir zuerst die beiden Ebenen $\zeta = \frac{1}{D_{\prime\prime}} - \frac{R^2 \Phi''}{2 D_{\prime\prime}^2}$ und $\zeta = \frac{1}{D_{\prime}} - \frac{R^2 \Phi'}{2 D_{\prime}^2}$, wonach die folgenden Schnitte eine geschlossene Schnittlinie der einen Evolutenschale, welche wir als die erste bezeichnen, aufweisen. Je nachdem nun die eine oder die andere der genannten Ebenen zuerst kommt, erscheinen auf dem Querschnitte des Strahlenbündels zuerst die die eine oder die andere Coordinatenebene schneidenden Theile dieser Evolutenschnittlinie. In den weiteren Schnitten wird die Krümmung dieser Schnittlinie der Evolute in denjenigen Punkten, in welchen sie die XZ-Ebene schneidet, immer grösser. Bei $\zeta = \frac{1}{D_{\prime\prime}} - \frac{R^2 \Omega}{2 D_{\prime\prime}^2}$ entstehen innerhalb derselben in der XZ-Ebene die Schnittlinien mit der einen Kante der zweiten Schale in Form von zwei Spitzen, welche von dem Hauptstrahl weg schauen, und welche sich immer mehr den gegenüberstehenden Theilen der Schnittlinie der ersten Evolute nähern. Bei $\zeta = \frac{1}{D_{\prime\prime}} - \frac{R^2 \Phi''}{8 D_{\prime\prime}^2}$ hört die Schnittlinie der Evolute auf, mit der Begrenzungslinie des Strahlenbündelquerschnittes zusammenzufallen, und bei $\zeta = \frac{1}{D_{\prime}} - \frac{R^2 \Omega}{2 D_{\prime}^2}$ entstehen in den Schnittpunkten

dieser Begrenzungslinie mit der YZ-Ebene die beiden Spitzen, welche die Anfangspunkte der zweiten Kante der zweiten Schale markiren. Bei $\zeta = \frac{1}{D_{,}} - \frac{D_{,,} - D_{,}}{D_{,}^{2}} \cdot \frac{\Phi'}{\Phi' - \Omega}$, in der Ebene, welche die Fokalpunkte der beiden Kreispunkte enthält, hat der Krümmungshalbmesser der beiden die XZ-Ebene schneidenden Theile der ersten Schale soweit abgenommen, dass eine Spitze entstanden ist, deren beide Tangenten auch Tangenten der die Schnittlinie mit der ersten Kante der zweiten Schale darstellenden Spitze sind, und die beiden Schnittlinien mit der zweiten Kante werden von der Begrenzungslinie des Querschnittes überragt. In den folgenden Schnitten gehört die erstgenannte Kante der ersten Schale an, welche eine immer kleiner werdende, in zwei in der XZ-Ebene belegene Spitzen auslaufende, geschlossene Schnittcurve zeigt, die bei $\zeta = \frac{1}{D_{,,}}$ die letzte Spur der ersten Schale in Form einer kurzen in der XZ-Ebene liegenden Linie darstellt, während die zweite Schale eine geschlossene Schnittlinie hat, welche mit zwei in der YZ-Ebene belegenen Spitzen, Durchschnitten der bezüglichen Kante, schliesslich bei $\zeta = \frac{1}{D_{,}}$ in einer kurzen, in der YZ-Ebene liegenden Linie endigt, nachdem die die XZ-Ebene schneidenden Curventheile einen immer grösseren Krümmungsradius erhalten und sich einander immer mehr genähert haben. Wenn in einem solchen Strahlenbündel der Astigmatismus nach Null hin abnimmt, so nähern sich die beiden Fokalpunkte der Kreispunkte und fallen schliesslich zusammen, wobei der der ersten Schale angehörige Theil der ersten Kante immer kleiner und schliesslich zu einem Punkte, der Evolutenspitze des nunmehr anastigmatischen Strahlenbündels, reducirt wird.

Das geschilderte Strahlenbündel entspricht den Bedingungen $\Phi'' - \Omega > \frac{2(D_{,,} - D_{,})}{R^2}$ und $8(D_{,,} - D_{,}) + R^2(\Phi'' - 4\Omega) > 0$. Bei Nichterfüllung der ersteren bildet die Schnittlinie der ersten Schale keine geschlossene Curve in der Ebene, in welcher die Schnittlinien der ersten Kante zuerst erscheinen, sondern erst in einem der folgenden Schnitte, jedoch immer bevor die Schnittlinien mit der zweiten Kante auftreten. Bei $8(D_{,,} - D_{,}) + R^2(\Phi'' - 4\Omega) < 0$ entstehen diese innerhalb der Schnittcurve der ersten Schale, bei $6(D_{,,} - D_{,}) + R^2(\Phi'' - 3\Omega) = 0$ liegen ihre Anfangspunkte auf dem Hauptstrahl, und bei $6(D_{,,} - D_{,}) + R^2(\Phi'' - 3\Omega) < 0$ entstehen sie wieder zwischen Hauptstrahl und Schnittlinie der ersten

Schale, aber jede auf der entgegengesetzten Seite, nähern sich in den folgenden Schnitten an einander, kreuzen sich in einem auf dem Hauptstrahl belegenen Punkte und gehen dann weiter aus einander, um schliesslich den beschriebenen Verlauf zu befolgen.

Ist endlich die Bedingung $R^2 \geqq \frac{2(D_{\prime\prime} - D_{\prime})}{\Phi' - \Omega}$ nicht erfüllt, so enthält das Wellenflächenelement des Strahlenbündels keine Kreispunkte mehr, jede Schale hat eine Kante, und auf den Querschnitten des Strahlenbündels liegt immer die Schnittlinie der einen ganz innnerhalb der der anderen. Bei $R^2 < \frac{2(D_{\prime\prime} - D_{\prime})}{\Phi'}$ kommen überhaupt keine Strahlenbündelquerschnitte mit Schnittlinien der beiden Evoluten vor, und der Uebergang zu typischen astigmatischen Strahlenbündel ist unmittelbar.

Solche Strahlenbündel können optisch erzeugt werden, wenn man zu einer planconvexe Linse, deren ebene Fläche dem Lichte zugewendet ist ein Cylinderglas hinzufügt, wobei die Brennstreke beliebig gross gewählt wird, so dass man den Uebergang vom anastigmatischen zum typischen astigmatischen Strahlenbündel gut verfolgen kann.

---

5. Die Brechung eines Strahlenbündels.

Unsere Kenntniss von der Constitution der Strahlenbündel im allgemeinen und der geometrischen Grössen, welche im speciellen Falle seine Eigenschaften bestimmen, wären von hauptsächlich theoretischem Interesse und würden insbesondere die Ophthalmologie nicht sehr fördern, wenn wir nicht gleichzeitig die Mittel angäben, um die genannten Grössen in den vorkommenden Fällen berechnen zu können.

Um dies zu thun, gehen wir von dem Brechungsgesetz aus, das bekanntlich folgende analytische Form hat.

$$\mu\alpha - \mu_{,}\alpha_{,} = \lambda\alpha_{,,}$$

$$\mu\beta - \mu_{,}\beta_{,} = \lambda\beta_{,,}$$

$$\mu\gamma - \mu_{,}\gamma_{,} = \lambda\gamma_{,,}$$

in welchen Ausdrücken $\alpha\beta\gamma$ die Richtungscosinuse des einfallenden, $\alpha_{,}\beta_{,}\gamma_{,}$ die des gebrochenen Strahles und $\alpha_{,,}\beta_{,,}\gamma_{,,}$ die der Normale der brechenden Fläche darstellen, während $\mu\mu_{,}$ die betreffenden Brechungsindices sind, und λ, wenn $\varphi\varphi_{,}$ Einfalls- bezw. Brechungswinkel sind, durch folgende Beziehung definirt wird:

$$\lambda = \mu \cos \varphi - \mu_{,} \cos \varphi_{,}$$

Wenn wir nun das einfallende Strahlenbündel und die brechende Fläche kennen, so sind die Richtungscosinuse $\alpha\beta\gamma$ bekannte Funktionen der Coordinaten $\xi\eta\zeta$ des Punktes, in welchem ein Strahl des einfallenden Strahlenbündels die Wellenfläche trifft, und ebenso sind $\alpha_{,,}\beta_{,,}\gamma_{,,}$ bekannte Funktionen der Coordinaten des Punktes xyz auf der brechenden Fläche, in welchem der fragliche Strahl gebrochen wird. Andererseits würden wir das gebrochene Strahlenbündel kennen, wenn wir die Richtungscosinuse $\alpha_{,}\beta_{,}\gamma_{,}$ als Funktionen der Coordinaten $\xi_{,}\eta_{,}\zeta_{,}$ des Punktes, in welchem der gebrochene Strahl die Wellenfläche trifft, kannten. Das ist aber eben, was uns die oben angeführten Gleichungen

geben, wenn wir die Beziehung der Coordinaten $\xi\eta\zeta$ xyz $\xi_{,}\eta_{,}\zeta_{,}$ zu einander einführen.

Diese Beziehung erhalten wir auf folgende Weise. Dass ein Strahl im Punkte $\xi\eta\zeta$ senkrecht auf der Wellenfläche des einfallenden Strahlenbündels steht, und im Punkte xyz die brechende Fläche trifft, wird durch die Gleichung

$$\xi - x + p(\zeta - z) = 0$$

ausgedrückt, und die entsprechende Gleichung

$$\xi_{,} - x + p_{,}(\zeta_{,} - z) = 0$$

giebt an, dass ein Strahl, welcher im Punkte xyz die brechende Fläche trifft, eine Normale der Wellenfläche des gebrochenen Strahlenbündels im Punkte $\xi_{,}\eta_{,}\zeta_{,}$ ist. Wir haben also nur diese beiden Gleichungen zu differentiiren und die Resultate mit denen, welche wir durch Differentiation der das Brechungsgesetz enthaltenden Gleichungen erhalten, zu combiniren, um die Ableitungen von $\alpha_{,}\beta_{,}\gamma_{,}$ nach $\xi_{,}\eta_{,}\zeta_{,}$ und mithin auch die das gebrochene Strahlenbündel bestimmenden geometrischen Grössen zu bekommen. Bei dieser Differentiation ist $d\zeta = pd\xi + qd\eta \ldots .$ $dz = p_{,,}dx + q_{,,}dy$ $d\zeta_{,} = p_{,}d\xi_{,} + q_{,}d\eta_{,}$ u. s. w. zu setzen. Für den allgemeinen Fall wählen wir am besten ein Coordinatensystem, dessen Origo mit dem Punkte auf der brechenden Fläche zusammenfällt, in welchem der Hauptstrahl gebrochen wird, dessen XY-Ebene die Tangentialebene dieser Fläche darstellt, und dessen X-Achse in der Brechungsebene liegt. Wenn dabei weder eine Haupttangente der brechenden Fläche noch ein Hauptschnitt des einfallenden Strahlenbündels mit der Brechungsebene zusammenfällt, so werden die Ausdrücke ziemlich komplicirt. Die erste Stufe dieser Rechnung giebt uns die Orientirung der Haupttangenten und die Hauptkrümmungen der Wellenfläche des gebrochenen Strahlenbündels und wurde schon von Sturm, obwohl nach anderer Methode, ausgeführt. Wenn wir mit θ $\theta_{,}$ $\theta_{,,}$ die Winkel bezeichnen, welche der erste Hauptschnitt des einfallenden bezw. des gebrochenen Strahlenbündels bezw. die erste Haupttangente der brechenden Fläche mit der Brechungsebene bilden, und unter $D_{,i}$ $D_{,,i}$ die Hauptkrümmungen der durch den Brechungspunkt des Hauptstrahls gelegten Wellenfläche des einfallenden Strahlenbündels, unter $D_{,r}$ $D_{,,r}$ die entsprechenden Werthe für das gebrochene Strahlenbündel und unter $D_{,s}$ $D_{,,s}$ die Hauptkrümmungen der brechenden Fläche verstehen so haben die betreffenden Gleichungen folgendes Aussehen:

$$\mu\cos^2\varphi(D_{,\iota}\cos^2\theta + D_{,,\iota}\sin^2\theta) - \mu_{,}\cos^2\varphi_{,}(D_{,r}\cos^2\theta_{,} + D_{,,r}\sin^2\theta_{,}) =$$
$$= (\mu\cos\varphi - \mu_{,}\cos\varphi_{,})(D_{,,}\cos^2\theta_{,,} + D_{,,,}\sin^2\theta_{,,})$$

$$\mu(D_{,\iota}\sin^2\theta + D_{,,\iota}\cos^2\theta) - \mu_{,}(D_{,r}\sin^2\theta_{,} + D_{,,r}\cos^2\theta_{,}) =$$
$$= (\mu\cos\varphi - \mu_{,}\cos\varphi_{,})(D_{,,}\sin^2\theta_{,,} + D_{,,,}\cos^2\theta_{,,})$$

$$\mu\cos\varphi(D_{,\iota} - D_{,,\iota})\sin 2\theta - \mu_{,}\cos\varphi_{,}(D_{,r} - D_{,,r})\sin 2\theta_{,} =$$
$$= (\mu\cos\varphi - \mu_{,}\cos\varphi_{,})(D_{,,} - D_{,,,})\sin 2\theta_{,,}$$

Diese Gleichungen sind immer leicht zu lösen, obwohl sie nicht gerade bequem zu handhaben sind. Aus den beiden ersten erhält man theils die Summe $D_{,r} + D_{,,r}$ theils das Produkt $(D_{,r} - D_{,,r})\cos 2\theta_{,}$, welches, quadrirt und mit dem Quadrate des Produktes $(D_{,r} - D_{,,r})\sin 2\theta_{,}$ addirt, das Quadrat der Differenz $D_{,r} - D_{,,r}$ giebt.

Um die Asymmetrienwerthe für den allgemeinen Fall zu finden, habe ich vor zehn Jahren allgemeingiltige Formeln angegeben, betreffs deren etwas umständlicher Deduktion ich auf die betreffende Stelle verweise[1]. Wenn wir die Asymmetrienwerthe der drei Flächen durch dieselben Bezeichnungen wie die Hauptkrümmungen unterscheiden, dann folgende Bezeichnungen einführen

$$a = -(U_{\iota}\cos^3\theta + 3V_{\iota}\cos^2\theta\sin\theta + 3W_{\iota}\cos\theta\sin^2\theta + \mathfrak{W}_{\iota}\sin^3\theta$$

$$b = -(U_{\iota}\cos^2\theta\sin\theta - V_{\iota}\cos\theta(\cos^2\theta - 2\sin^2\theta) +$$
$$+ W_{\iota}\sin\theta(\sin^2\theta - 2\cos^2\theta) - \mathfrak{W}_{\iota}\cos\theta\sin^2\theta)$$

$$c = -(U_{\iota}\cos\theta\sin^2\theta + V_{\iota}\sin\theta(\sin^2\theta - 2\cos^2\theta) +$$
$$+ W_{\iota}\cos\theta(\cos^2\theta - 2\sin^2\theta) + \mathfrak{W}_{\iota}\cos^2\theta\sin\theta)$$

$$d = -(U_{\iota}\sin^3\theta - 3V_{\iota}\sin^2\theta\cos\theta + 3W_{\iota}\sin\theta\cos^2\theta - \mathfrak{W}_{\iota}\cos^3\theta)$$

$$e = D_{,\iota}\cos^2\theta + D_{,,\iota}\sin^2\theta \qquad f = (D_{,\iota} - D_{,,\iota})\sin\theta\cos\theta$$
$$g = D_{,\iota}\sin^2\theta + D_{,,\iota}\cos^2\theta$$

und $a_{,}b_{,}\ldots\ldots a_{,,}b_{,,}\ldots\ldots$ dieselbe Bedeutung für die geometrischen Grössen $U_{r}V_{r}\ldots\ldots\theta_{,}$ der Wellenfläche des gebrochenen Strahlenbündels, bezw. für die der brechenden Fläche $U_{\iota}V_{\iota}\ldots\ldots\theta_{,,}$ haben lassen, so sind die fraglichen Formeln folgende:

$$\mu\{a\cos^3\varphi - 3(e^2 + f^2)\cos^2\varphi\sin\varphi + 3ee_{,,}\cos\varphi\sin\varphi\} -$$
$$- \mu_{,}\{a_{,}\cos^3\varphi_{,} - 3(e_{,}^2 + f_{,}^2)\cos^2\varphi_{,}\sin\varphi_{,} + 3e_{,}e_{,,}\cos\varphi_{,}\sin\varphi_{,}\} =$$
$$= (\mu\cos\varphi - \mu_{,}\cos\varphi_{,})a_{,,}$$

---

[1] Nord. Med. Arch. Bd. XXII N:o 8 S. 31 ff. (schwedisch) und Skand. Arch. für Physiologie Bd. II S. 324 ff. (deutsch).

$$\mu\{b\cos^2\varphi - 2(ef + fg - ef_{,,})\cos\varphi\sin\varphi + fe_{,,}\sin\varphi\} -$$
$$-\mu_,\{b_,\cos^2\varphi_, - 2(e_,f_, + f_,g_, - e_,f_{,,})\cos\varphi_,\sin\varphi_, + f_,e_{,,}\sin\varphi_,\} =$$
$$= (\mu\cos\varphi - \mu_,\cos\varphi_,)\,b_{,,}$$

$$\mu\{c\cos\varphi - (f^2 + g^2 - 2ff_{,,})\sin\varphi + eg_{,,}\sin\varphi\cos\varphi\} -$$
$$-\mu_,\{c_,\cos\varphi_, - (f_,^2 + g_,^2 - 2f_,f_{,,})\sin\varphi_, + e_,g_{,,}\sin\varphi_,\cos\varphi_,\} =$$
$$= (\mu\cos\varphi - \mu_,\cos\varphi_,)\,c_{,,}$$

$$\mu\{d + 3fg_{,,}\sin\varphi\} - \mu_,\{d_, + 3f_,g_{,,}\sin\varphi_,\} = (\mu\cos\varphi - \mu_,\cos\varphi_,)\,d_{,,}$$

also ein System von vier Gleichungen ersten Grades. Bei der Anwendung ist nur für den Fall $D_{,r} = D_{,,r}$ zu bemerken, dass die Grössen $U_r V_r \ldots.$ nicht mehr die bezüglichen geometrischen Grössen des gebrochenen Strahlenbündels darstellen, weil dieses anastigmatisch ist, sondern nur die entsprechenden Differentialquotienten $uv \ldots.$ für dasjenige Coordinatensystem $p = q = 0$ repräsentiren, dessen X-Achse in der Brechungsebene liegt. Dadurch ist aber, wie wir gesehen haben, das gebrochene Strahlenbündel faktisch bekannt, da wir nur die Gleichung dritten Grades zu lösen haben, welche die Orientirung der Haupttangenten angiebt, um die Werthe $R'\lambda'\lambda''$ unmittelbar zu bekommen.

Es ist offenbar, dass ausser der zu erwartenden Complicirtheit der Ausdrücke nichts der Weiterführung der Rechnung, deren nächste Stufe die Aberrationswerthe des gebrochenen Strahlenbündels giebt, für den allgemeinen Fall entgegensteht, aber sicherlich würden die Formeln, wenn wir sie deducirten, niemals zur Anwendung kommen. In der That haben wir ja auch gesehen, dass in den asymmetrischen Strahlenbündeln — so wohl den anastigmatischen wie den astigmatischen — die Aberrationswerthe von untergeordneter Bedeutung gegenüber den Asymmetrienwerthen sind. Deshalb haben wir auch nicht für die Fälle, wo die Brechungsebene eine Symmetrieebene des einfallenden Strahlenbündels und der brechenden Fläche, mithin auch des gebrochenen Strahlenbündels, darstellt, die Formeln für die Aberrationswerthe zu deduciren für nöthig erachtet. In diesem Falle werden die Formeln für die Hauptkrümmungen und für die Asymmetrien viel einfacher:

$$\mu\cos^2\varphi\,D_{,\iota} - \mu_,\cos^2\varphi_,\,D_{,r} = (\mu\cos\varphi - \mu_,\cos\varphi_,)\,D_{,,}$$

$$\mu\,D_{,,\iota} - \mu_,D_{,,r} = (\mu\cos\varphi - \mu_,\cos\varphi_,)\,D_{,,,}$$

$$\mu\cos^3\varphi\,U_\iota - \mu_,\cos^3\varphi_,\,U_r = (\mu\cos\varphi - \mu_,\cos\varphi_,)\,U_, +$$
$$+ 3\mu\sin\varphi\,D_{,,}(\cos\varphi\,D_{,\iota} - \cos\varphi_,D_{,r}) - 3\mu\sin\varphi(\cos^2\varphi\,D_{,\iota}^2 - \cos^2\varphi_,D_{,r}^2)$$

$$\mu \cos\varphi\, W_i - \mu_, \cos\varphi_, W_r = (\mu \cos\varphi - \mu_, \cos\varphi_,) W_s +$$
$$+ \mu \sin\varphi\, D_{,,i} (\cos\varphi\, D_{,i} - \cos\varphi_, D_{,r}) - \mu \sin\varphi (D_{,,i}^2 - D_{,,r}^2)$$

Wenn in diesem Falle das gebrochene Strahlenbündel anastigmatisch ist, so haben die Grössen $U_r W_r$ unmittelbar ihre geometrische Bedeutung, da die Brechungsebene mit einem Hauptschnitte zusammenfällt.

Ich habe diese Formeln benützt, um die Brechung unter schiefer Incidenz in einer einzigen brechenden Fläche, sowie die in einem Prisma und in einer schiefgestellten Linse zu untersuchen, wonach controlirende Experimente ergaben, dass die Resultate der Rechnung auch bei so grosser Öffnung, wie nach Brechung in einem Objective eines Operngläses, die Eigenschaften der Strahlenbündel hinreichend genau angeben. Da dies einestheils betreffend der sphärischen Aberration nach Brechung in centrirten Rotationsflächen längst bekannt ist, anderentheils aber betreffs der Aberrationswerthe überhaupt schon daraus gefolgert wird, dass diese höherer Ordnung als die Asymmetrienwerthe sind, so habe ich weitere dergleichen Experimente für unnöthig erachtet, und wir werden uns demnach in den folgenden Zeilen darauf beschränken, die Aberrationswerthe des gebrochenen Strahlenbündels bei Vorhandensein von zwei Symmetrieebenen zu deduciren.

Hierbei fällt in unserem Coordinatensystem der Hauptstrahl mit der Z-Achse zusammen, und die Asymmetrienwerthe sämmtlicher drei Flächen sind gleich Null. Unter diesen Voraussetzungen erhalten wir aus den zwei Differentialgleichungen

$$\mu d\gamma - \mu_, d\gamma_, = \lambda d\gamma_{,,} + \gamma_{,,} d\lambda$$
$$\mu d^2\gamma - \mu_, d^2\gamma_, = \lambda d^2\gamma_{,,} + 2\, d\lambda\, d\gamma_{,,} + \gamma_{,,} d^2\lambda$$

da die drei Werthe $d\gamma$ gleich Null sind, unter Beachtung der bezüglichen Identitäten $d^2\gamma = -(d\alpha^2 + d\beta^2)$ den Ausdruck:

$$d^2\lambda = (\mu - \mu_,)(d\alpha_{,,}^2 + d\beta_{,,}^2) - \mu(d\alpha^2 + d\beta^2) + \mu_,(d\alpha_,^2 + d\beta_,^2)$$

den wir mit Hilfe der aus den beiden Differentialgleichungen

$$\mu d\alpha - \mu_, d\alpha_, = \lambda d\alpha_{,,}$$
$$\mu d\beta - \mu_, d\beta_, = \lambda d\beta_{,,}$$

leicht zu beweisenden Identität

$$\mu_,(d\alpha_,^2 - d\alpha_{,,}^2) - \mu(d\alpha^2 - d\alpha_{,,}^2) = -\frac{\mu(\mu_, - \mu)}{\mu_,}(d\alpha - d\alpha_{,,})^2$$

und der entsprechenden Beziehung zwischen den Differentialen $d\beta$ in folgender Form

$$d^2\lambda = -\frac{\mu(\mu_, - \mu)}{\mu_,}\{(d\alpha - d\alpha_{,,})^2 + (d\beta - d\beta_{,,})^2\}$$

anwenden. In der Differentialgleichung dritter Ordnung

$$\mu d^3\alpha - \mu_, d^3\alpha_, = (\mu - \mu_,) d^3\alpha_{,,} + 3 d\alpha_{,,} d^2\lambda$$

betrachten wir sämmtliche Richtungscosinuse als Funktionen von den Coordinaten xy des Punktes, in welchem der betreffende Strahl die brechende Fläche trifft. Aus den bekannten Relationen

$$\alpha = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \qquad \beta = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

finden wir

$$d\alpha = -dp = -r\,d\xi$$

$$d^3\alpha = -d^3p + 3dp(dp^2 + dq^2) = -\Phi'_, d\xi^3 - 3\Omega'_, d\xi d\eta^2 - r d^3\xi$$

nebst analogen Werthen für die brechende Fläche und für das gebrochene Strahlenbündel. Für den Uebergang auf die Ableitungen nach xy finden wir aus den eben angeführten Gleichungen, welche die bezüglichen Punkte von einander abhängig machen,

$$d\xi = dx = d\xi_, \qquad d^2\xi = d^2\xi_, = 0$$

$$d^3\xi = -3r\,dx\{(r - r_{,,})dx^2 + (t - t_{,,})dy^2\}$$

$$d^3\xi_, = -3r_, dx\{(r_, - r_{,,})dx^2 + (t_, - t_{,,})dy^2\}$$

Nach Elimination von $r_,$ und $t_,$ mittels der Gleichungen

$$\mu_, r_, = (\mu_, - \mu) r_{,,} + \mu r$$

$$\mu_, t_, = (\mu_, - \mu) t_{,,} + \mu t$$

erhalten wir folgenden Ausdruck

$$\mu r d^3\xi - \mu_, r_, d^3\xi_, + 3 d\alpha_{,,} d^2\lambda = -\frac{3\mu(\mu_, - \mu)}{\mu_,^2}(r - r_{,,})^2\Big((\mu_, + \mu) r - \mu r_{,,}\Big) dx^3 -$$

$$-\frac{3\mu(\mu_, - \mu)}{\mu_,^2}(t - t_{,,})\Big\{(r - r_{,,})\{(\mu_, + \mu) r + (\mu_, - \mu) r_{,,}\} - \mu_, r_{,,}(t - t_{,,})\Big\} dx\,dy^2$$

wonach sich schliesslich aus der Differentialgleichung dritter Ordnung der Richtungscosinuse α eine Gleichung ergiebt, welche nur dx^3 und $dx\,dy^2$ enthält, und welche demnach, da x und y unabhängige Variabe-

le sind, zwei Gleichungen giebt. Auf eben dieselbe Weise finden wir bei Ausgang von den Differentialgleichungen, welche aus der Gleichung zwischen den Richtungscosinusen β erhalten werden, zwei ähnliche Gleichungen, welche auch einfach durch Drehung des Coordinatensystemes um einen Winkel von $\frac{\pi}{2}$ aus den beiden ersten erhalten werden können. Diese vier Gleichungen, welche die Aberrationswerthe des gebrochenen Strahlenbündels geben, wenden wir in folgender Form an:

$$\mu_{,}\Phi_r' = (\mu_{,} - \mu)\Phi_s' + \mu\Phi_i' + \frac{3\mu(\mu_{,} - \mu)}{\mu_{,}^2}(r_{,,} - r)^2\{\mu r_{,,} - (\mu_{,} + \mu)r\}$$

$$\mu_{,}\Omega_r' = (\mu_{,} - \mu)\Omega_s' + \mu\Omega_i' + \frac{u(\mu_{,} - \mu)}{\mu_{,}^2}\Big\{(r_{,,} - r)(t_{,,} - t)\{\mu r_{,,} - (\mu_{,} + \mu)r\} -$$
$$- \mu_{,}r_{,,}(t_{,,} - t)(r_{,,} - t_{,,} - r + t)\Big\}$$

$$\mu_{,}\Omega_r'' = (\mu_{,} - \mu)\Omega_s'' + \mu\Omega_i'' + \frac{\mu(\mu_{,} - \mu)}{\mu_{,}^2}\Big\{(r_{,,} - r)(t_{,,} - t)\{\mu t_{,,} - (\mu_{,} + \mu)t\} +$$
$$+ \mu_{,}t_{,,}(r_{,,} - r)(r_{,,} - t_{,,} - r + t)\Big\}$$

$$\mu_{,}\Phi_r'' = (\mu_{,} - \mu)\Phi_s'' + \mu\Phi_i'' + \frac{3\mu(\mu_{,} - \mu)}{\mu_{,}^2}(t_{,,} - t)^2\{\mu t_{,,} - (\mu_{,} + \mu)t\}$$

Man sieht, dass die Gleichungen für Φ_r' bezw. Φ_r'', wenn die brechende Fläche sphärisch ist, mit den früher bekannten Formeln für die sog. sphärische Aberration bei Brechung in sphärischen Flächen vollkommen übereinstimmen, und weiter, dass bei $r - t = r_{,,} - t_{,,} = \Phi_i' - 3\Omega_i = \Phi_i'' - 3\Omega_i = \Phi_s' - 3\Omega_s = \Phi_s'' - 3\Omega_s = 0$ d. h. wenn die Wellenfläche des einfallenden Strahlenbündels und die brechende Fläche centrirte Umdrehungsflächen sind, dasselbe auch mit der Wellenfläche des gebrochenen Strahlenbündels der Fall ist, indem $r_{,} - t_{,} = \Phi_r' - 3\Omega_r = \Phi_r'' - 3\Omega_r = 0$ erhalten wird. Dem allgemeinen Gesetze zufolge ist $\Omega_i' - \Omega_i'' = rt(r - t)$ sowie $\Omega_s' - \Omega_s'' = r_{,,}t_{,,}(r_{,,} - t_{,,})$ und es muss $\Omega_r' - \Omega_r'' = r_{,}t_{,}(r_{,} - t_{,})$ sein, was auch die Formeln nach Einsetzung der bezüglichen Werthe geben.

In Bezug auf Linsen und die vielfältigen Zusammensetzungen von solchen können diese Formeln eine reichliche Anwendung finden, insbesondere bei gleichzeitiger Anwendung der von den Ableitungen vierter Ordnung in den Gleichungen der Wellenflächen und der brechenden Fläche abhängigen Formeln für Bildkrümmungen und Distorsion. Was die letzteren Aufgaben betrifft, so gehören sie nicht in den Rahmen

der vorliegenden Arbeit, und was die Aberrationen von Gläsern betrifft, so haben sie für die Opthalmologie eine ganz untergeordnete Bedeutung, da die Abblendung durch die Pupille hinreichend ist, um die durch die Brillen verursachten Aberrationen ohne Bedeutung für das Sehen zu machen. Da wir aber mittels dieser Formeln die Eigenschaften des bei Brechung in einer beliebigen sphärocylindrischen oder torischen Combination entstehenden Strahlenbündels berechnen können, so haben wir es auch in der Hand, die verschiedenen Formen von Strahlenbündeln für Unterrichts- oder andere Zwecke demonstriren zu können. Andererseits sind sie geeignet, auf solche Flächen wie die Hornhaut, die auch im schönsten Auge keine Umdrehungsfläche darstellt, angewendet zu werden.

Man möchte glauben, die Eigenschaften des gebrochenen Strahlenbündels wären hinreichend bekannt, wenn wir seine Wellenfläche kennen, und in der That wird wohl der rein mathematische Gesichtspunkt nicht mehr fordern. Aber bei optischen Strahlenbündeln müssen wir auch über die Lichtvertheilung auf den einzelnen Querschnitten des Strahlenbündels, sowie über die durch die Brechung veränderte Form der Begrenzungslinie Aufschluss zu gewinnen suchen. Beide Aufgaben gehören zusammen und werden durch die Normalengleichungen bezw. durch diejenigen Gleichungen gelöst, welche die Coordinaten des Punktes, in welchem ein Strahl nach der Brechung die Wellenfläche trifft, von den Coordinaten des Punktes abhängig machen, in welchem derselbe Strahl vor der Brechung die bezügliche Wellenfläche schneidet.

Was zunächst die Begrenzungslinie eines Strahlenbündels betrifft, so kennen wir sie entweder als Blende, welche also einen Strahlenbündelquerschnitt von bekannter Form darstellt, oder als Fassung einer brechenden Fläche, wobei die Linie als Schnittlinie zwischen dieser und einer cylindrischen Fläche von bekannter Form in der Rechnung erscheint. Wie wir im Cap. 2 gesehen haben, ist dann durch die Gleichungen der Normale die Schnittlinie des Conoides, welches das Strahlenbündel ausser in der Nähe der Fokalpunkte begrenzt, mit einer beliebigen zur Fokalebene parallelen Ebene bekannt. Wenn uns demnach die Begrenzungslinie vor der Brechung durch Differentialgleichungen, welche

$$d\xi^2 \quad d\eta^2 \quad dR^2$$

$$d\xi d^2\xi \quad d\eta d^2\eta \quad d\xi^3 \quad d\xi^2 d\eta \quad d\xi d\eta^2 \quad d\eta^3$$

$$d\xi d^3\xi \quad (d^2\xi)^2 \quad (d^2\eta)^2 \quad d\eta d^3\eta \quad d\xi^4 \quad d\xi^3 d\eta \quad d\xi^2 d\eta^2 \quad d\xi d\eta^3 \quad d\eta^4$$

enthalten, bekannt ist, so haben wir nur die oben angewendeten Beziehungen zwischen den Coordinaten $\xi\eta\zeta$ des Schnittpunktes eines Strahles mit der Wellenfläche vor der Brechung und den Coordinaten $\xi_,\eta_,\zeta_,$ des Schnittpunktes desselben Strahles mit der Wellenfläche nach der Brechung einzuführen, um sofort die Begrenzungslinie des Strahlenbündels auf der Wellenfläche nach der Brechung und damit auch auf jedem in endlicher Entfernung von den Fokalpunkten gelegten Schnitte in ähnlichen Differentialgleichungen dargestellt zu finden.

Wir sehen unmittelbar, dass dieselbe Methode auch auf andere ein Strahlenbündel schneidende Linien oder Liniensysteme anwendbar ist. Für den Fall, dass zwei Symmetrieebenen existiren, wollen wir die Formeln angeben. Wenn wir mit $\xi_\iota\eta_\iota\zeta_\iota$ die Coordinaten eines Punktes bezeichnen, durch welchen ein beliebiger Strahl vor der Brechung geht, mit $ab\,0$ die Coordinaten des Punktes, in welchem derselbe Strahl — wenn nöthig verlängert — vor der Brechung die Tangentialebene der brechenden Fläche trifft, endlich mit $\xi_r\eta_r\zeta_r$ $a_,b_,0$ die Coordinaten der entsprechenden Punkte, welche derselbe Strahl nach der Brechung passirt, so finden wir ohne Schwierigkeit folgende Formeln:

$$d\xi_\iota = da(1 - \zeta_\iota r) \qquad d\eta_\iota = db(1 - \zeta_\iota t)$$

$$d^3\xi_\iota = d^3a(1 - \zeta_\iota r) - \zeta_\iota(\Phi_\iota' da^3 + 3\,\Omega_\iota'' da\,db^2)$$

$$d^3\eta_\iota = d^3b(1 - \zeta_\iota t) - \zeta_\iota(3\,\Omega_\iota' da^2 db + \Phi_\iota'' db^3)$$

welche mutatis mutandis auch für das gebrochene Strahlenbündel gelten, und für den Uebergang von dem einen Strahlenbündel auf das andere bei der Brechung die nachstehenden:

$$da_, = da \qquad db_, = db$$

$$d^3a_, = d^3a + \frac{3(\mu_, - \mu)}{\mu_,}(r_{,,} - r)(r_{,,}da^3 + t_{,,}da\,db^2)$$

$$d^3b_, = d^3b + \frac{3(\mu_, - \mu)}{\mu_,}(t_{,,} - t)(r_{,,}da^2 db + t_{,,}db^3)$$

Durch diese Formeln sind also die Coordinaten $\xi_r\eta_r$ bekannte Funktionen der beiden Variabeln $\xi_\iota\eta_\iota$, und wir kennen die Eigenschaften des Liniensystemes, welches in der Ebene $\zeta = \zeta_r$ im gebrochenen

Strahlenbündel einem orthogonalen Liniensysteme in der Ebene $\zeta = \zeta_i$ vor der Brechung entspricht. Um z. B. eine η_i-Linie auf dem Querschnitte $\zeta = \zeta_r$ zu finden, theilen wir ξ_i einen beliebigen constanten Werth zu und betrachten ξ_r als Funktion von η_r. Für den Schnittpunkt der fraglichen Linie mit der XZ-Ebene und ihre Krümmung in diesem Punkte finden wir auf diese Weise durch Entwickelung von ξ_r und $\frac{d^2 \xi_r}{d\eta_r^2}$ nach Potenzen von ξ_i bezw. ξ_r:

$$\xi_r = \xi_i \cdot \frac{d\xi_r}{d\xi_i} + \frac{\xi_i^3}{6} \cdot \frac{\partial^3 \xi_r}{\partial \xi^3_i} \qquad \frac{d^2 \xi_r}{d\eta^2_r} = \xi_r \frac{\dfrac{\partial^3 \xi_r}{\partial \xi_i \, \partial \eta^2_i}}{\dfrac{d\xi_r}{d\xi_i}\left(\dfrac{d\eta_r}{d\eta_i}\right)^2}$$

Die auf diese Weise leicht zu construirenden Liniensysteme geben uns bis auf unendlich kleine Grössen höherer Ordnung als der dritten die Schnittlinien der Ebene $\zeta = \zeta_r$ mit den geradlinigen Flächen, welche nach der Brechung den geradlinigen Flächen entsprechen, die vor der Brechung aus den durch die Linien $\xi_i = \text{const.}$, $\zeta = \zeta_i$ bezw. $\eta_i = \text{const.}$, $\zeta = \zeta_i$ gehenden Normalen gebildet werden. Die Zahl der Brechungen ist, wie ersichtlich, ohne Einfluss; die einzige Bedingung ist, dass die brechende Fläche in endlichem Abstande von den Fokalpunkten des einfallenden Strahlenbündels sich befindet.

Wenn wir also die Ebene $\zeta = \zeta_i$ das ursprüngliche homocentrische Strahlenbündel schneiden lassen und den beiden Variabeln $\xi_i \eta_i$ jeder für sich verschiedene Werthe zuertheilen, welche nach einer und derselben arithmetischen Progression wachsen, so giebt uns das entsprechende Liniensystem in der Ebene $\zeta = \zeta_r$ die anschaulichste Vorstellung von der Variation der Dichtigkeit des Strahlenbündels auf dem Querschnitte. Beim Lichtstrahlenbündel erhalten wir einen solchen Querschnitt durch Auffangen des Lichtes auf einem Schirme, und es geben dabei diese Liniensysteme die Vertheilung der Beleuchtungsintensität auf dem beleuchteten Theile des Schirmes an. Werden die Linien gezeichnet, erhält man unmittelbar eine korrekte Vorstellung von dieser Vertheilung, welche um so naturgetreuer ist, je dichter das Liniennetz gezeichnet worden ist. Nur muss man sich erinnern, dass ein mit den ursprünglichen vollkommen übereinstimmendes Liniensystem nicht etwa angiebt, dass jeder Theil des Schirmes die gleiche Beleuchtung hat, sondern nur, dass die Beleuchtungsintensität eines beliebigen Punktes sich zu der eines anderen so verhält, wie wenn der Schirm von einem wirklichen leuchtenden Punkte mit nach allen Rich-

tungen gleicher Ausstrahlung beleuchtet wäre, welcher sich in einem gleichen Abstande vom Schirme befindet, wie der des ursprünglichen leuchtenden Punktes von der Ebene $\zeta = \zeta_{\prime}$.

Für praktische Zwecke scheint mir diese Methode, die Beleuchtungsintensität auf den Querschnitten zu untersuchen, ohne Frage die beste zu sein. Will man sie wissenschaftlicher haben, so werden auch die Ausdrücke komplicirter. Man kann dann das Liniensystem in der Ebene $\zeta = \zeta_{\prime}$ von einem anderen auf der ursprünglichen sphärischen Wellenfläche abhängen lassen, dessen Linien kleinste Flächentheile von constantem Flächeninhalte abgrenzen, wonach die entsprechenden Liniensysteme auf einem Querschnitte des gebrochenen Strahlenbündels kleinste Theile abgrenzen, welche eine und dieselbe Lichtmenge empfangen. Aus den Elementen, welche das Liniensystem bestimmen, kann man dann die Ableitungen der Beleuchtungsintensität nach ξ_r und η_r erhalten. Schliesslich kann auch die Eigenschaft des Strahlenbündels, welche diese Vertheilung der Beleuchtungsintensität auf den verschiedenen Querschnitten bedingt, als Ableitungen des Ausstrahlungsvermögens nach den Variabeln p und q bestimmt werden. Aber, wie gesagt, die Ausdrücke werden zu komplicirt, und da für unsere Zwecke die angeführte Methode ausreicht, begnüge ich mich damit, diesen Weg angedeutet zu haben.

6. Die nächsten Ergebnisse der Theorie im Gebiete der Ophthalmologie.

Dass die Asymmetrien und Aberrationen von eminenter Bedeutung für das menschliche Auge sind, obwohl die Lehre von den monochromatischen Aberrationen bisher aus natürlichen Gründen nur einen untergeordneten Platz in der Ophthalmologie eingenommen hat, unterliegt keinem Zweifel.

Das normale menschliche Auge hat nämlich einen solchen Grad von Aberration, und bei Vorhandensein von Astigmatismus ist die Brennstrecke so klein im Verhältniss zum Durchmesser der Pupille, dass in der Regel Schnittlinien beider Evoluten auf denselben Querschnitten des Strahlenbündels vorkommen, und in den für die Praxis so wichtigen Fällen von Astigmatismus niedrigen Grades die Wellenfläche des im Auge gebrochenen Strahlenbündels zwei Kreispunkte innerhalb der der Pupille entsprechenden Begrenzungslinie enthält. Und diese Aberration, kann während der Accommodation verändert werden, wie TSCHERNING gezeigt hat, und wie leicht zu constatiren ist.

Wenn also schon im normalen Auge das Sehen bei der unter so mannigfaltigen Verhältnissen wechselnden Pupillengrösse von den Aberrationen beeinflusst wird, so muss andererseits die Aenderung der Aberration während dem Accommodationsacte einen veränderten Accommodationsmechanismus in den fraglichen Fällen andeuten, über deren Bedeutung für die durch Nahearbeit resultirenden Symptome und Folgezustände weitere klinische Untersuchungen hoffentlich näheren Aufschluss geben werden. Und nicht nur für die Accommodation d. h. für die täglich und stündlich vorkommenden temporären Veränderungen in der Linse in den fraglichen Fällen, sondern auch für die bleibenden senilen Veränderungen hat die Aberration eine weitgehende Bedeutung, da z. B. die die Staarbildung in einer Reihe von Fällen einleitende, bezw. begleitende Myopie mit einer abnormen Aberration einhergeht. Um nicht von Keratoconus und falschem Leniconus zu sprechen, in welchen Fällen diese einen kolossalen Grad erreicht!

Nicht minder wichtig sind die Asymmetrien. Obwohl die durch die schiefe Incidenz auf die brechenden Flächen des Auges verursachte horizontale Asymmetrie, wie ich gezeigt habe, vollkommen bedeutungslos ist, und die im normalen Auge gewöhnliche vertikale Asymmetrie auch zu unbedeutend ist, um von Einfluss zu sein, kommt eine pathologische Steigerung dieser so häufig vor, und ist von so bedeutendem Einflusse sowohl auf die Funktionstüchtigkeit des Organes wie auf die Nothwendigkeit einer Correction und auf die Schwierigkeit der Untersuchung, dass die Kenntniss dieser Anomalie den Ophtalmologen in Stand setzt, manche segensreiche Correctionen zu ermitteln, welche ohne diese nicht zu erhalten sind.

Unter solchen Umständen ist es natürlich, dass verschiedene Autoren versucht haben, den durch die Asymmetrien und die Aberrationen verursachten Zuständen mit zugänglichen Mitteln näher zu treten, und die Litteratur weist schon eine Reihe von Arbeiten auf, in welchen die fraglichen Zustände untersucht und dabei gewöhnlich als eine Veränderung der Refraction innerhalb der Pupille aufgefasst werden. Von den meisten Ophthalmologen werden aber die fraglichen Fälle in das grosse Fach des unregelmässigen Astigmatismus hineinrangirt, ein Fach, welches, abgesehen von den Fällen mit Hornhautnarben, Linsentrübungen oder wirklich constatirbaren Unregelmässigkeiten in der Form der brechenden Flächen, solche Fälle enthält, die der betreffende Ophthalmologe nicht versteht. Man findet sogar als Definition des regelmässigen bezw. des unregelmässigen Astigmatismus die Angabe, dass bei dem ersteren die Brechung von Meridian zu Meridian wechselt, während bei den letzteren die Brechung innerhalb eines und desselben Meridianes nicht dieselbe ist. In das Fach des unregelmässigen Astigmatismus geworfen zu werden ist aber für den Kranken dasselbe als das Urtheil: es giebt keine Hilfe.

Dass andererseits die angestellten Untersuchungen der Aberrationen und Asymmetrien, da die Constitution der betreffenden Strahlenbündel und damit das Wesen dieser Anomalien bisher nicht bekannt war, gewissermassen ein Herumtappen im Dunkeln gewesen sind, ist leicht einzusehen. Dasselbe ist offenbar der Fall mit der ganzen Diskussion, ob ein Astigmatiker ohne Correction beim Sehen eine der Brennlinien oder den kreisförmigen Durchschnitt des nach dem Typus des STURM'schen Conoides construirten, im Auge gebrochenen Strahlenbündels auf die Netzhaut fallen lässt, eine Diskussion, welche in dem Augenblicke ganz hinfällig wird, wo wir beweisen können, dass

die Form des fraglichen Strahlenbündels auch nicht annäherungsweise mit der des genannten Conoides verglichen werden kann.

Am meisten aber entbehrt man bei der Deutung der Resultate der sonst sehr verdienstvollen, im Laboratorium der *Sorbonne* ausgeführten Untersuchungen des Auges mit einem leuchtenden Punkt die Hilfe der theoretischen Kenntnisse des Strahlenbündels; und die Methode, nach welcher die Untersuchungen der Aberration des Auges ausgeführt worden sind, auf welche u. A. eine neue Theorie der Accommodation sich stützt, ist, wie wir sehen werden, eine Methode, mit welcher andere als die beabsichtigten Grössen bestimmt werden, obwohl besondere Umstände es bedingen, dass aus den Resultaten für die Praxis hinreichend genaue Schlüsse gezogen werden können.

Es leuchtet also ein, dass der Theorie der monochromatischen Aberrationen ein weites Feld im Gebiete der Ophtalmologie offen liegt, welches wir hier nur in einigen wenigen Richtungen und ohne Anspruch auf Vollständigkeit erforschen können.

Bevor wir uns aber darauf einlassen, wollen wir zuerst den Uebergang von den Asymmetrien- und Aberrationsgrössen zu dem mehr ophthalmologischen Begriffe der Veränderung der Refraction des Auges innerhalb des Pupillargebietes ermitteln. Wenn wir in dem optischen Systeme des Auges die ζ-Achse mit dem Hauptstrahl des gebrochenen Strahlenbündels zusammenfallen lassen und als Origo den zweiten Hauptpunkt wählen, dann mit f die bezügliche vordere Brennweite des optischen Systemes, mit a den Abstand des leuchtenden Punktes von dem auf dem Hauptstrahl des einfallenden Strahlenbündels belegenen ersten Hauptpunkt und schliesslich mit n den Brechungsindex des Glaskörpers bezeichnen, so haben wir für den Bildpunkt:

$$\frac{n}{\zeta} = \frac{1}{f} + \frac{1}{a}$$

welche Formel auch im astigmatischen Auge und bei schiefer Incidenz sowie bei Decentration der brechenden Flächen giltig ist, wofern nur immer eine Hauptkrümmungslinie der brechenden Fläche mit der Brechungsebene des Hauptstrahls zusammenfällt, d. h. wofern nur das im Auge gebrochene Strahlenbündel eine Symmetrieebene hat[1]. Nur ist zu beachten, dass $\frac{1}{f}$ verschiedene Werthe für die beiden Hauptrichtun-

[1] Vergl. Ueber die Bedeutung der Dioptrie, Arch. f. Ophth. XLIX, 1, 1899!

gen hat, und dass die Hauptpunkte in der einen nicht mit denen in der anderen zusammenfallen.

Durch Differentiation finden wir für $a = \infty$:

$$d\frac{1}{f} = -\frac{n}{\zeta^2}d\zeta \qquad d^2\frac{1}{f} = -\frac{n}{\zeta^2}d^2\zeta + \frac{2n}{\zeta^3}d\zeta^2$$

Wenn wir nun für die beiden Hauptrichtungen die Bezeichnungen $\zeta_,\ \frac{1}{f_,}$ bezw. $\zeta_{,,}\ \frac{1}{f_{,,}}$ anwenden und die Grössen $\varrho, D,\ U\Phi' \dots$ auf die durch den Anfangspunkt des Coordinatensystemes gehenden Wellenfläche des gebrochenen Strahlenbündels beziehen, so finden wir bei Anwendung der im ersten Capitel für die Evolute deducirten Formeln

$$d\zeta_, = d\varrho_, \qquad d^2\zeta_, = d^2\varrho_, + d^2z + \varrho_, d^2\gamma = d^2\varrho_, + \frac{D_{,,}(D_, - D_{,,})}{D_,}dy^2$$

nebst den analogen für die zweite Evolute die einfachen Beziehungen

$$d\frac{1}{f_,} = n\,dD_, \qquad d^2\frac{1}{f_,} = n\{d^2D_, - D_,D_{,,}(D_, - D_{,,})dy^2\}$$

$$d\frac{1}{f_{,,}} = n\,dD_{,,} \qquad d^2\frac{1}{f_{,,}} = n\{d^2D_{,,} + D_,D_{,,}(D_, - D_{,,})dx^2\}$$

Wäre nun das im Auge gebrochene Strahlenbündel vom Typus des allgemeinen astigmatischen, was eventuell bei künstlich erzeugtem hochgradigem Astigmatismus und enger Pupille erreicht werden könnte, so könnten die Ableitungen in Bezug auf die beiden Variabelen $s_, s_{,,}$ auf der Wellenfläche ausgeführt werden; da aber bei den vorkommenden Graden von Astigmatismus und bei normaler Pupillengrösse die Brennstrecke immer von derselben Grössenordnung wie der Durchmesser der Pupille, ja gewöhnlich kleiner als dieser ist, so kann dieses Coordinatensystem nicht angewendet werden, sonden wir müssen uns auf die Fälle mit wenigstens einer Symmetrieebene beschränken, wobei wir nach den Ausführungen im Cap. 4 die Ableitungen in Bezug auf die Bogenlänge der betreffenden Hauptkrümmungslinie vornehmen können, die Brennstrecke mag noch so klein oder das Strahlenbündel sogar anastigmatisch sein. Hierbei ist, wie wir gesehen haben, das Glied $D_,D_{,,}(D_, - D_{,,})$ in den bezüglichen Ableitungen wegzulassen. Ebenso lässt sich leicht zeigen, dass die Fehler, welche wir begehen, indem wir $f = 15$ mm und $n = 4/3$ setzen sowie die Bogenlängen $\sigma_,$ bezw. $\sigma_{,,}$ der Hauptkrümmungslinien der Wellenfläche des im Auge gebrochenen

Strahlenbündels in dem Luftbilde der Pupille messen, von grösserer Kleinheitsordnung sind, als dass sie in dieser Rechnung zu berüksichtigen wären.

Als Mass der Refraction des Auges wenden wir, wie gewöhnlich, den reciproken Werth des Abstandes von dem Punkte an, für welchen das Auge eingestellt ist, messen den Abstand in Metern und rechnen ihn positiv, wenn der betreffende Punkt reell ist, wonach die Refraction in Dioptrien gemessen wird und bei myopischer Einstellung positiv ist. Wenn wir die Refraction des Auges in den beiden Hauptrichtungen mit D' bezw. D'', den Abstand der Netzhaut von dem hinteren Hauptpunkte mit b bezeichnen und den Millimeter als Massseinheit wählen, so gilt nach dieser Definition allgemein $\frac{D}{1000} = \frac{1}{f} - \frac{n}{b}$ d. h. $dD' = 1000\, d\frac{1}{f_{,}}$ $d^2D' = 1000\, d^2\frac{1}{f_{,}}$ u. s. w. Ist nun das Auge in der einen Hauptrichtung für unendlich grossen Abstand eingestellt, so ist $\frac{1}{a} = 0$ und der entsprechende Krümmungshalbmesser der Wellenfläche ist gleich 20 mm — der hinteren Brennweite des Auges. Bei Anwendung dieses Werthes finden wir für eine Hauptkrümmungslinie, längs welcher das gebrochene Strahlenbündel eine Symmetrieebene hat, und wenn das Auge in der betreffenden Hauptrichtung für die Ferne eingestellt ist:

$$dD' = \frac{10\, dD_{,}}{3\, D^2_{,}} \qquad d^2D' = \frac{d^2D_{,}}{6\, D^3_{,}}$$

nebst analogen Werthen für die zweite Hauptkrümmung, wonach wir die Refractionswethe $D'\, D''$ nach Potenzen der Bogenlänge σ der Fraglichen Hauptkrümmungslinie entwickeln können: [1]

[1] Hierbei haben wir die Verschiebung des hinteren Hauptpunktes des Auges nicht in Rechnung gezogen, weil dadurch nur unendlich kleine Grössen höherer Ordnung vernachlässigt werden. Wenn wir nämlich seinen Abstand vom Anfangspunkt des Coordinatensystemes mit z bezeichnen, so haben wir $\frac{n}{\zeta - z} = \frac{1}{f} + \frac{1}{a}$ und für $z = 0$:

$$n\, dD_{,} = -\frac{n}{\zeta^2}\, d\zeta = d\frac{1}{f} - \frac{n}{\zeta^2}\, dz$$

$$n\, d^2D_{,} = -\frac{n}{\zeta^2}\, d^2\zeta + \frac{2n}{\zeta^3}\, d\zeta^2 = d^2\frac{1}{f} - \frac{n}{\zeta^2}\, d^2z - \frac{2n}{\zeta^3}\, dz(dz - 2d\zeta)$$

$$D' = \sigma \cdot \frac{10\,U}{3\,D_{,}^{2}} + \sigma^{2} \cdot \frac{\Phi'}{12\,D_{,}^{3}} = \sigma \cdot \frac{R'}{6} + \sigma^{2} \cdot \frac{A'}{240}$$

$$D'' = \sigma \cdot \frac{10\,W}{3\,D_{,,}^{2}} + \sigma^{2} \cdot \frac{\Omega}{12\,D_{,}^{3}} = \sigma \cdot \frac{\lambda' R'}{6} + \sigma^{2} \cdot \frac{C}{240}$$

In diesen Formeln sind also $D'D''$ Dioptrienwerthe, während $\sigma R' A C$ in Millimetern gemessen sind, und, wie im anastigmatischen Strahlenbündel, $\lambda' = \frac{W}{U} \cdot \frac{D_{,}^{2}}{D_{,,}^{2}}$ gesetzt worden ist. Sie sind allgemeingiltig für Strahlenbündel, deren Brennstrecke von derselben Grössenordnung wie der Durchmesser der Pupille oder gleich Null ist, und für welche die XZ-Ebene eine Symmetrieebene ist. Dass in dem letzten Gliede die Differenz $D_{,} - D_{,,}$ vernachlässigt werden und somit $D_{,,}$ durch $D_{,}$ ersetzt werden kann, ist schon bewiesen worden, ebenso wie dass aus demselben Grunde bei Vorhandensein von zwei Symmetrieebenen die Differenz $\Omega' - \Omega''$ zu vernachlässigen ist. Aus derselben Ursache kann im Nenner des ersten Gliedes $D_{,}$ durch $D_{,,}$ oder vice versa ersetzt werden, wenn entweder die Asymmetrienwerthe von derselben Grössenordnung wie der Durchmesser der Pupille sind, oder im entgegengesetzten Falle nur die erste Potenz von σ mitgenommen wird. Wie wir sehen werden, ist ersteres, wenn nicht die Pupille durch Synechien eine erhebliche Decentration erlitten hat, gewöhnlich der Fall.

Die in den Formeln vorkommenden Grössen $\frac{U}{D_{,}^{2}}\ \frac{\Phi'}{D_{,}^{3}} \ldots\ldots$ sind Zahlenwerthe und erlauben also, die Grössen $U \Phi' \ldots\ldots$ für eine beliebige Messeinheit zu finden. Sie sind bequemer als diese, es möge der Millimeter oder der Centimeter die Einheit sein. Wenn die Symmetrieebene mit der YZ-Ebene zusammenfällt, gelten die analogen For-

---

Da nun weiter $db = -dz$ ist, mithin $dD' = 1000\left(d\frac{1}{f} - \frac{n}{\zeta^{2}}dz\right)$ $d^{2}D' = 1000\left(d^{2}\frac{1}{f} - \frac{n}{\zeta^{2}}d^{2}z - \frac{2n}{\zeta^{3}}dz^{2}\right)$ erhalten wird, so resultirt $dD' = 1000\,n\,dD,$ $d^{2}D' = 1000\,n\left(d^{2}D, - \frac{4}{\zeta^{3}}d\zeta\,dz\right)$. Aus den allgemeinen Formeln für die Lage des hinteren Hauptpunktes eines optischen Systemes (l. c. S. 68) geht aber hervor, dass wenn der Abstand zwischen den brechenden Flächen von derselben Grössenordnung ist wie der Diameter der Pupille, und eine etwaige Schiefstellung der brechenden Flächen von derselben wie die Öffnung des Strahlenbündels — welche Bedingungen immer im Auge erfüllt sind — der Werth von $\frac{dz}{d\sigma}$ auch von derselben Grössenordnung ist, mithin in dieser Rechnung zu vernachlässigen ist.

meln, und wenn das Strahlenbündel anastigmatisch ist, hat man nur $R'\Phi'A'$ durch $R'_{,}\Phi_{,}A_{,}$ bezw. $R'_{,,}\Phi_{,,}A_{,,}$ zu ersetsen und für $D_{,}D_{,,}D'D''$ die Bezeichnungen $D_{,}D_{,}$ sowie die analogen $D'D'$ zu gebrauchen.

Indem wir, wie gesagt, σ im Luftbilde der Pupille messen, finden wir durch diese Formeln die geometrischen Eigenschaften der Wellenfläche des gebrochenen Strahlenbündels, wenn wir durch Untersuchung ermittelt haben, wie sich die Refraction des Auges innerhalb des Gebietes der Pupille verändert, und umgekehrt. Diese Veränderung der Refaction ist so zu verstehen, dass der einem bestimmten Werthe von σ entsprechende Werth von D'' die Refraction angiebt, welche das Auge bei minimaler, um σ mm decentrirter Pupille aufweisen würde, wenn es bei minimaler, centraler Pupille — eventuell mit Hilfe eines Correctionsglases — in der bezüglichen Hauptrichtung emmetropisch ist.

Zum Beispiel finden wir, dass, wenn in einer Hauptrichtung die centrale Refraction emmetropisch ist, aber am Rande der 4 mm im Durchmesser haltenden Pupille beiderseits eine Hypermetropie von 1 D. in derselben Hauptrichtung gefunden wird, die Wellenfläche des gebrochenen Strahlenbündels längs der betreffenden Hauptkrümmungslinie eine Berührung vierter Ordnung mit einer Parabel hat, indem $\frac{\Phi'}{3D_{,}^{3}} = -1$ gefunden wird, und A' gleich -6 cm. ist.

A priori ist zu erwarten, dass von den *Untersuchungsmethoden* des Auges, welche die Asymmetrien und Aberrationen zum Vorschein kommen lassen, die *mit einem leuchtenden Punkte* in einfachster Weise die sichersten Resultate ergeben sollte. Und in der That verhält es sich so, wenn nämlich die Erscheinungen gedeutet werden können, was erst mit Hilfe der Theorie der monochromatischen Aberrationen möglich ist. Schon das Wesen der in erster Linie auftretenden Erscheinung — der sichtbaren Strahlen der Sterne — ist bisher ein Räthsel gewesen, da zu der Vermuthung von v. Helmholtz, dass sie in der Linse entstehen, welche er auf ihre Abwesenheit nach Staarextraction und ihren bei gewisser Versuchsanordnung zu constatirenden Uebergang in die entoptische Linsenfigur stützt, nichts Wesentliches hinzugefügt werden konnte, und das Phänomen gewöhnlich als von einem in gewissem Grade unter normalen Verhältnissen vorhandenen unregelmässigen Astigmatismus herrührend angesehen wurde.

Bekanntlich verschwinden, wenn man die Pupille von einer Seite her zudeckt, die nach derselben Seite gerichteten Strahlen, und die kleine helle Scheibe, von welcher die Strahlen ausgehen, wird von derselben Seite her kleiner. Wenn man die Sternfigur an einem leuchtenden Punkte beobachtet, den man durch ein Diaphragma vor einer hellen künstlichen Lichtquelle erzeugt hat, und dabei durch ein Cobaltglas sieht, so erscheint die centrale Scheibe — vorausgesetzt, dass ein etwa vorhandener Astigmatismus corrigirt ist — purpurn, während die Strahlen blau leuchten. Alles bekannte Beweise dafür, dass die sichtbaren Strahlen durch Lichtstrahlen erzeugt werden, welche im Auge den centralen Lichtstrahl gekreuzt haben, bevor sie die Netzhaut erreichen. Man sieht zwar die Sternfigur am grössten, wenn der leuchtende Punkt an der Grenze der Accommodationsstrecke oder etwas ausserhalb des Fernpunktes belegen ist, aber wenn der Punkt nur hinreichend klein ist, kann man ihr auch bei scharfer Fixation nicht entgehen, und es gehört keine grosse Pupille dazu, da es gut gelingt, durch ein Loch von 3 mm Durchmesser nicht nur einzelne Strahlen, sondern bei richtiger Centration die volle Sternfigur wahrzunehmen.

Um diese Sternfigur zu verstehen, wollen wir uns zunächst fragen, wie wir einen leuchtenden Punkt sehen würden, wenn das im Auge gebrochene Strahlenbündel von dem im Cap. 4 beschriebenen Typus mit diagonalastigmatischer Aberration wäre. Wie wir uns erinnern, kann kein kreisförmiger kleinster Durchschnitt eines solchen Strahlenbündels vorhanden sein, sondern der für die Abbildung günstigste Theil des Strahlenbündels zeigt einen centralen, mehr oder weniger kreisförmigen Durchschnitt der Evolute und vier von diesem ausgehende schlingenförmige Ausbuchtungen, welche in den beiden Coordinatenebenen orientirt sind, und welche den vier betreffenden Kanten der zweiten Evolutenschale entsprechen, mithin eine Lichtconcentration in ihren Mittellinien aufweisen müssen. Wenn wir nun bedenken, dass die Lichtempfindlichkeit des Auges bei Beleuchtung abnimmt, so dass Halbtöne in der Nähe eines hellen Punktes nicht unterschieden werden, indem die Netzhaut dabei das Licht in etwa derselben Weise in Nerventhätigkeit umsetzt, wie eine *hart arbeitende* photographische Platte in chemisch wirksame Energie, so erhellt, dass bei solcher Brechung im Auge ein leuchtender Punkt als eine kleine Scheibe mit vier kreuzförmig ausgehenden Strahlen erscheinen müsste.

Nun wissen wir aber, dass, wenn die Wellenfläche eines Strahlenbündels eine vollständige Berührung vierter Ordnung mit einer Um-

drehungsfläche hat, die zweite Evolutenschale eine beliebige, von den Ableitungen höherer Ordnung abhängige Zahl von Kanten aufweisen kann, welche abwechselnd nach entgegengesetzten Richtungen schauen. Aber auch wenn eine solche Berührung nicht existirt, sondern die Evolute nur zwei oder vier durch den Fokalpunkt gehende Kanten hat, können diese sich in unendlich kleiner Entfernung nach den im Cap. 1 besprochenen Typen zertheilen, wobei wieder jede zweite der so entstandenen Kanten nach einer anderen Richtung schauen muss.

Man ersieht, dass die um einen leuchtenden Punkt sichtbare Strahlenfigur durch die Existenz einer jedem sichtbaren Strahle entsprechenden, nach der betreffenden Richtung schauenden Kante auf derjenigen Evolutenschale erklärt werden kann, welche, wenn die Wellenfläche eine Umdrehungsfläche wäre, in die Rotationsachse degeneriren würde, und welche wir als die zweite bezeichnen. Um die Sternfigur zu erklären, erübrigt also nur die Beweise zu erbringen, dass die entsprechenden Kanten auf der zweiten Evolutenschale des im normalen Auge gebrochenen Strahlenbündels vorhanden sind.

Zunächst constatiren wir, dass das im normalen Auge gebrochene Strahlenbündel bei Abwesenheit von Asymmetrie vom Typus $\Omega(\Phi - \Omega) > 0$ ist mit positiven Aberrationswerthen, indem wir durch successive Aenderungen der optischen Einstellung mittels verschiedener sphärischer Gläser bei corrigirtem Astigmatismus und erschlaffter Accommodation die verschiedenen Durchschnitte des Strahlenbündels und der Evolute auf der Netzhaut fallen lassen, wobei, wenn der leuchtende Punkt anfangs jenseits des Fernpunktes belegen ist, bei dem bewirkten Hinausrücken dieses zuerst die Sternfigur, dann eine mehr weniger kreisförmige helle Evolutenschnittlinie auftritt, welche die Begrenzungslinie des im Inneren weniger hell erscheinenden Strahlenbündelquerschnittes darstellt. Da diese weder in zwei orthogonalen Richtungen merkbar ungleichen Durchmesser hat, noch eine wahrnehmbare Ungleichheit zwischen zwei solchen Ebenen auf der einen Seite und den auf ihnen diagonal orientirten auf der anderen aufweist, so können wir mit für unsere Zwecke hinreichender Genauigkeit die Wellenfläche als eine, welche mit einer Umdrehungsfläche eine vollständige Berührung vierter Ordnung hat, erklären. Dagegen zeigt die Schnittlinie der Evolute strahlenförmige Ausbuchtungen, obwohl die Strahlen bei mittelgrosser Pupille nicht mit derselben Deutlichkeit erscheinen, wie in der gewöhnlich sichtbaren Sternfigur. Diese Strahlen verschwinden auf der entgegengesetzten Seite, wenn die Pupille von einer Seite her zuge-

deckt wird, und leuchten im Versuche mit dem Cobaltglas roth, wonach die entsprechenden Ausbuchtungen auf dem auf die Netzhaut fallenden Querschnitt des Strahlenbündels von Lichtstrahlen gebildet werden, welche nicht den centralen Strahl gekreuzt haben. An der Zahl überwiegen diese sichtbaren Strahlen die in der gewöhnlichen Sternfigur bedeutend, und was ihre Orientation betrifft, kann man mit sicherheit constatiren, dass diese nicht mit derjenigen der Strahlen in der gewöhnlichen Sternfigur übereinstimmt, sondern dass im Gegentheil in denjenigen Richtungen, in welchen deutliche Strahlen der gewöhnlichen Sternfigur wahrgenommen werden, keine Strahlen auf der erwähnten Evolutenschnittlinie vorkommen. Diese Erscheinung beweist eben, dass das ganze Phänomen von den Kantenbildungen der zweiten Evolute herrührt.

Wenn nämlich eine Fläche in einem Kreispunkte eine Berührung n-ter Ordnung mit einer Umdrehungsfläche hat, so muss der Differentialquotient $\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\frac{1}{\varrho}$ als Function von ϑ bei Drehung des Coordinatensystemes um die Normale herum abwechselnd durch ein Maximum und ein Minimum passiren, wobei, wie wir S. 105 gesehen haben, die t-Linie der entsprechenden abwickelbaren Normalfläche im erstgenannten Falle auf der entgegengesetzten Seite der Kreispunktsnormale, im letztgenannten auf derselben wie der entsprechende Theil der s-Linie auf der Fläche belegen ist. Wenn wir nun eine Kante der zweiten Evolutenschale, welche der erstgenannten Form der t-Linien entspricht als negativ bezeichnen, und demnach eine Kante positiv nennen, auf welche die t-Linie den Typus der Fig. 6 S. 79 aufweist, so finden wir also, dass bei fortwährender Drehung des Coordinatensystemes der in der XZ-Ebene liegende Normalschnitt abwechselnd eine negative Kante bei grösserem Werthe von $\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\frac{1}{\varrho}$ und eine positive Kante bei kleinerem Werthe von $\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\frac{1}{\varrho}$ aufweisen muss. Eine Flächennormale, welche in einem Normalschnitte liegt, der die osculirende Ebene einer negativen Kante darstellt, schneidet also den Hauptstrahl in einem kleineren Abstande von der Fläche als eine Normale, welche in einem Hauptschnitte liegt, der die osculirende Ebene einer positiven Kante darstellt. Jenen Kanten müssen also Ausbuchtungen der von der Fläche relativ weiter ab gelegten Strahlenbündelquerschnitte, diesen solche auf der relativ näher gelegten entsprechen, und in den Ausbuchtungen bei-

der Arten muss längs der Mittellinie eine Lichtconcentration stattfinden. Die Strahlenbündel sind also ganz ähnlich dem im Cap. 4 beschriebenen mit diagonalastigmatischer Aberration mit der einzigen Ausnahme, dass die abwechselnden Normalschnitte verschiedener Constitution in grösserer Zahl vorhanden sind.

Es unterliegt also keinem Zweifel, dass die Sternfigur, welche um einen leuchtenden Punkt gesehen wird, eine ebenso regelmässige Erscheinung wie irgend eine andere ist, obwohl die Gesetze, welchen diese Erscheinung gehorcht, etwas complicirter sind. Dass die auf den Schnittlinien der Evolute sichtbaren Strahlen in grösserer Anzahl vorhanden sind als die Strahlen der gewöhnlichen Sternfigur, stimmt damit überein, dass die gewöhnliche Sternfigur, wenn der leuchtende Punkt durch optische Mittel jenseits des Fernpunktes des Auges verschoben wird, auch eine grössere Anzahl von sichtbaren Strahlen zeigt. Hierbei sieht man noch im Centrum einen hellen Punkt, und die neu hinzutretenden sichtbaren Strahlen reichen nicht immer bis zu diesem hinein. Es ist ersteres ein Beweis dafür, dass derjenige Querschnitt des Strahlenbündels, welcher beim scharfen Sehen im normalen Auge auf die Netzhaut fällt, nicht mit dem Fokalpunkt zusammenfällt, sondern der Ebene entspricht, in welcher ein in einem das Minimum der Aberration aufweisenden Normalschnitte der Wellenfläche verlaufender Strahl den gegenüberliegenden Theil der Evolute schneidet. Wäre die Aberration in allen Richtungen dieselbe, würde also diese Ebene mit der Ebene des kleinsten Zerstrenungskreises identisch sein, und bei diagonalastigmatischer Aberration würde das an der betreffende Stelle Cap. 4 deducirte Verhalten stattfinden.

In den best gebauten Augen findet man die am meisten hervortretenden Strahlen der Sternfigur in den Hauptrichtungen des in den meisten Augen in niedrigem Grade vorhandenen Astigmatismus und in den zwischen diesen diagonal verlaufenden, so dass bei Correction des Astigmatismus eine regelmässig achtstrahlige Sternfigur zum Vorschein kommt, welche jedoch gewöhnlich eine unbedeutende vertikale Asymmetrie zeigt, indem die horizontalen Strahlen der Figur nicht durch das Centrum gehen.

Nachdem wir in dieser Hinsicht die Constitution des im normalen Auge gebrochenen Strahlenbündels erforscht haben, wollen wir zusehen, ob daraus einige Schlüsse betreffs der brechenden Flächen oder Medien gezogen werden können. Bei den gefundenen Eigenschaften der Wellenfläche des Strahlenbündels sehen wir, dass ein zur Tangentialebene

parallel gelegter Schnitt durch diese eine geschlossene Linie darstellt, deren Radius vector entsprechend jedem Strahle der sichtbaren Sternfigur ein Minimum hat. Eine solche Beschaffenheit der Wellenfläche kann aber nur dann entstehen, wenn entweder eine der brechenden Flächen dieselbe Beschaffenheit zeigt oder der Brechungsindex eines der brechenden Medien nach entsprechenden Gesetzen variirt. Weder das eine noch das andere trifft für die Hornhaut zu, deren Form innerhalb des Bezirkes, welcher bei dem minimalen für die Wahrnehnung der Sternfigur nöthigen Diaphragma optisch wirksam ist, als sphärisch angesehen werden kann. Es muss also, wie schon aus anderen Gründen vermuthet worden ist, die Linse diese Eigenschaft der Wellenfläche verursachen. Da aber der anatomische Bau der Linse zwar eine Sternfigur erklären könnte, welche in den best gebauten Augen sechsstrahlig wäre, aber unter keinen Umständen eine regelmässige achtstrahlige Sternfigur bedingen kann, so kann nicht eine etwaige durch den anatomischen Bau der Linse bedingte Variation des Brechungsindex dieser die Ursache sein. Dagegen giebt es im Befestigungsapparate der Linse wirksame Kräfte, welche etweder die entsprechende Deformation der vorderen Linsenfläche oder das bezügliche Variationsgesetz des Brechungsindex bedingen können. Da nämlich sowohl die vordere Linsenkapsel als die Linse selbst als Ganzes eine bedeutende Elasticität hat, und die Linse durch die Zonula an dem eine beschränkte Zahl von Vorsprüngen bildenden Ciliarkörper befestigt ist, und da weiter bei der Accommodation die Formveränderung des Ciliarkörpers vermittels der gesteigerten bezw. erschlafften Zonularspannung eine Formveränderung der vorderen Linsenfläche bewirkt bezw., wenn sie durch die Elasticität der Linse bewirkt wird, erlaubt, so erhellt es, dass in denjenigen Normalschnitten der vorderen Linsenfläche, welche den Ciliarfortsätzen entsprechen, bei Spannung der Zonula stärkere Kräfte wirksam sind als in den zwischenliegenden, wodurch die Bedingungen für eine solche Beschaffenheit der vorderen Linsenfläche gegeben sind, welche zur Erklärung des Entstehens der die Sternfigur bedingenden Beschaffenheit der Wellenfläche ausreicht. Da aber somit die Linsensubstanz in verschiedenen Hauptschnitten unter verschieden hohem Drucke steht, so kann a priori nicht abgemacht werden, ob eine Deformation der vorderen Linsenfläche wirklich vorhanden ist, oder die Druckverhältnisse bewirken, dass der Brechungsindex der Linse in den den Ciliarfortsätzen entsprechenden Normalschnitten nach anderen Gesetzen peripheriewärts abnimmt als in den zwischenliegenden. Für

erstere Annahme spricht jedenfalls der Umstand, dass der Linsenrand im lebenden Auge eingekerbt erscheint, wie z. B. nach Iridectomie constatirt werden kann.

Die angegebenen Formeln liefern das Mittel, *die Aberration des Auges zu messen.* Wenn man sicher ist, die Accommodation während des Versuches erschlaffen zu können, wie es wohl der praktisch thätige Ophthalmologe sicher sein kann, wenn das Auge gut gebaut ist, so braucht man nur bei erschlaffter Accommodation die Differenz der Gläsercorrectionen in Rechnung zu ziehen, welche die Evolutenspitze bezw. die der Wellenfläche am nächsten liegende Evolutenschnittlinie auf die Netzhaut bringen, und unter ähnlicher Versuchsanordnung den Diameter der Pupille zu bestimmen. Der leuchtende Punkt braucht nicht weiter als 1 m entfernt zu sein. Man beginnt also mit einer Correction, welche den Fernpunkt des Auges eine hinreichende Strecke diesseits des Lichtpunktes verlegt, so dass im Centrum der Lichtfigur kein heller, scharf begrenzter Punkt zu sehen ist, verändert die Correction von halber zu halber Dioptrie und notirt das Glas, bei welchem die erwähnte Erscheinung zuerst deutlich auftritt. Bei den folgenden Veränderungen der Correction sieht man die kleine helle Lichtfläche von einer helleren Lichtlinie begrenzt und notirt die letzte Correction, welche noch diese Lichtlinie deutlich hervortreten lässt. Die zwei gefundenen Dioptriezahlen geben direkt den Refractionsunterschied zwischen »optischem Centrum» und Rand der Pupille[1], wenn wir unter jener Bezeichnung den Punkt verstehen, durch welchen der die Evolutenspitze des gebrochenen Strahlenbündels tangirende Strahl geht, und dessen Decentration in der Pupille von der Lage des hellen Lichtpunktes innerhalb der gewöhnlichen Sternfigur bestimmt wird, welcher mithin bei positiver Aberration mit dem Punkte schwächster Refraction identisch ist. Den Diameter der Pupille misst man unmittelbar nachher unter derselben Versuchsanordnung, was am einfachsten mit dem weiter unten zu erwähnenden TSCHERNING'schen Aberroskop oder einer ähnlichen Vorrichtung geschieht. In meinem rechten Auge, das ich als sehr gut gebaut zu bezeichnen zu dürfen glaube, beträgt diese Differenz, bei einer Pupille von 6 mm Diameter, 4 Dioptrien. Das Auge hat emmetropische Refraction mit geringem direkten Astigmatismus: die Sehschärfe ist ohne Glas $^5/_4$ und die maximale, welche mit einem concaven Cylinderglase von $^1/_2$ D. horizontaler Achse erhalten wird,

[1] Richtiger der »optischen Zone». Siehe unten!

ist $^5/_3$. Mit diesem Glase ist die um einen leuchtenden Punkt sichtbare Sternfigur fast vollkommen regelmässig achtstrahlig, und die genau vertikal nach oben und unten verlaufenden Strahlen bilden eine Symmetrielinie, während die eben so genau horizontal nach innen und aussen verlaufenden einen etwas grösseren unteren Theil von dem etwas kleineren oberen trennen. Das optische Centrum der Pupille liegt demnach etwas höher als das anatomische. In Uebereinstimmung hiermit verschwindet bei dem genannten Versuche der nach unten sichtbare Theil der Evolutenschnittlinie bei einer Correction bei welcher noch der nach oben sichtbare Theil deutlich wahrzunehmen ist, ein Beweis für die Empfindlichkeit der Methode und für die vollständige Erschlaffung meiner Accommodation während dem Versuche. Ich hebe letztere, auch durch den weiter unten angegebenen, von der Accommodation ganz unabhängigen Versuch constatirte, Thatsache besonders hervor, da man bei Müller Rée die Aufgabe findet, dass nach seiner Erfahrung auch Ophthalmologen, welche die Accommodation bei der ophthalmoskopischen Untersuchung vollständig beherrschen, bisweilen bei der Untersuchung des Auges mit einem leuchtenden Punkte nicht im Stande sind, diese hinreichend zu erschlaffen. Die angegebene Zahl von 4 D. entspricht dem horizontalen Hauptschnitte und giebt mittels der Formel S. 178 den Werth $\frac{\Phi}{D^3} = 5{,}33 \ldots$ Zum Vergleich erheben wir den Werth $\frac{\Phi}{D^3} = 27$ für das reducirte Auge, welcher sich unmittelbar aus der Formel S. 168 ergiebt, indem diese für parallel einfallendes Licht und sphärische Gestalt der brechenden Fläche die Form $\frac{\Phi}{D^3} = \frac{3\mu^2}{(\mu_, - \mu)^2}$ annimmt. Im schematischen Auge von v. Helmholtz finden wir, wenn wir den beiden Linsenflächen eine solche Form geben, dass das in jeder von ihnen gebrochene Strahlenbündel, wenn vor der Brechung ohne Aberration, auch nach dieser aberrationsfrei ist, für parallel in die Hornhaut einfallendes Licht den Werth $\frac{\Phi}{D^3} = 8{,}1$. Bei der Ausführung dieser Rechnung hat man die Aberrationswerthe des in der Hornhaut gebrochenen Strahlenbündels auf die im Schnittpunkte der optischen Achse mit der vorderen Linsenfläche gelegte Wellenfläche zu reduciren, was auch beim Uebergang von der vorderen zur hinteren Linsenfläche gilt, und schliesslich nach der Brechung in dieser die Werthe auf eine 20 mm von dem hinteren Brennpunkte des Auges belegene Wellenfläche zu beziehen.

Bevor wir aber die gefundene Zahl verwerthen, müssen wir Versuche mit anderen Pupillengrössen machen. Da wir nämlich in unserer Serie nur die zweite Potenz von σ mitgenommen haben, so ist der Pupillenhalbmesser von 3 mm bei einem Krümmungsradius der Wellenfläche von 20 mm etwas zu gross, und andererseits ist zu erwarten, dass ein grösserer Diameter der Pupille Aufschluss über die peripherische Brechung des Auges geben wird. Und in der That, wenn ich die Pupille mit Cocain oder Homatropin dilatire, finde ich bei einem Diameter von 8 mm dieselbe Zahl von 4 D. Die am meisten in die Augen springende Veränderung ist hierbei, dass die den positiven Kanten entsprechenden Strahlen, welche an der Evolutenschnittlinie sichtbar sind, in hohem Grade verlängert erscheinen und ausserdem in den der Evolutenspitze näher liegenden Schnitten auftreten, so dass sogar Strahlen beider Art auf einmal gesehen werden können, wobei sicher zu constatiren ist, dass immer die einen in den Zwischenräumen der anderen belegen sind. Wenn ich die Durchschnitte des Strahlenbündels auf der Netzhaut von der Evolutenspitze aus verfolge, so finde ich, dass die Evolutenschnittlinie zum letzten mal bei derselben Correction wie bei nicht dilatirter Pupille gesehen wird und zwar mit demselben scheinbaren Diameter, während der Querschnitt des Strahlenbündels viel grösser ist. Es hat also die Evolute eine Kante, welche einer mehr oder weniger kreisförmigen Linie $U = 0$ auf der Wellenfläche des gebrochenen Strahlenbündels entsprechen muss. Da diese Kante nach der Wellenfläche zu schaut, hat Φ auf der betreffenden Linie $U = 0$ einen negativen Werth. Es leuchtet ein, dass unter diesen Umständen der dünnste Querschnitt des Strahlenbündels derjenigen Stelle entsprechen muss, wo der umgebogene Theil der Evolute den anderen schneidet, welche Stelle weiter ab von der Spitze liegen muss als bei undilatirter Pupille, obwohl nicht so viel weiter, wie wenn die Aberration für jeden Punkt der Wellenfläche positives Vorzeichen hätte. In voller Uebereinstimmung hiermit steht die durch die entsprechende Vergrösserung des kleinsten Querschnittes bedingte Herabsetzung der Sehschärfe, sowie die leicht zu constatirende Thatsache, dass, wenn der leuchtende Punkt innerhalb der Accommodationsstrecke liegt und möglichst scharf fixirt wird, niemals Strahlen erscheinen, welche den negativen Kanten entsprechen, sondern im Gegentheil immer solche, welche bei Verdecken der Pupille von einer Seite her auf der entgegengesetzten verschwinden, und welche mit dem Cobaltglas roth leuchten, ja bei gewöhnlichem Lichte deutlich rothe Spitzen zeigen. Ausserdem kann ich die Schnitt-

linie des umgebogenen Theiles der Evolute bei dilatirter Pupille in demjenigen Strahlenbündelquerschnitte erkennen, welcher die Evolutenspitze enthält, indem hier ein deutlicher, obwohl zackiger heller Ring die Begrenzungslinie ausmacht, was sonst nicht der Fall ist.

Auf der anderen Seite ergeben wiederholte Versuche, dass ich noch durch ein Loch von 4 mm Diameter die Evolute bis zur erwähnten Kante sehe und denselben Refractionsunterschied von 4 D. bekomme, was einem Werthe $\frac{\Phi}{D^3} = 12$ entspricht. Schon bei den Versuchen ohne Diaphragma, aber noch mehr mit dieser kommen am Rande der Zerstreuungskreise Interferenzerscheinungen vor, indem die Begrenzungslinie wie verstärkt aussieht, so dass man an eine Evolutenschnittlinie denken könnte, wenn das Phänomen nicht durch Auftreten eines ganz dunklen Ringes unmittelbar auf der Innenseite der Begrenzungslinie und durch das Vorkommen an Querschnitten des Strahlenbündels, welche in grösserem Abstande von der sichtbaren Evolute gelegt werden, als eine Interferenzerscheinung erwiesen wäre.

Wir haben also gefunden, dass die Linie $U = 0$ auf der Wellenfläche des in meinem rechten Auge gebrochenen Strahlenbündels einen Diameter von ungefähr 4 mm hat. Da längs dieser Linie Φ einen negativen Werth hat, so müssen negative Aberrationswerthe höherer Ordnung für den centralen Strahl gelten. Wenn wir also in unserer Serie nur die zweite Potenz von σ mitnehmen, so können wir sicher sein, dass die für den Diameter von 4 mm gefundene Zahl $\frac{\Phi}{D^3} = 12$ nicht zu gross ist.

Das Auge hat mithin bei der Pupillengrösse, welche beim scharfen Sehen in Frage kommt, eine positive Aberration, welche nicht allein von der Hornhaut herrühren kann, auch wenn wir die optische Zone dieser — wie wir bisher müssen — als sphärisch ansehen. Vom optischen Centrum der Pupille aus nimmt die Refraction nach beiden Seiten zu und erreicht in einem Abstande von 2 mm den Maximalwerth mit einem Ueberschuss von vier Dioptrien, wonach wieder eine Abnahme stattfindet, so dass im Abstande von 4 mm — am Rande der maximal dilatirten Pupille — die Refraction wieder ungefähr gleich der centralen ist. Man beachte, dass hierbei der äusserste Strahl negative sowohl laterale als longitudinale Aberrationswerthe hat, was durch eine einfache Construction der Schnittlinie der Evolute mit dem fraglichen Hauptschnitte unmittelbar erhellt, d. h. dass die periphere negative Aberra-

tion nicht ausreicht um den äussersten Strahl zum Durchgehen durch den Fokalpunkt zu bringen. Es ist also nothwendig, den Begriff der nach der Peripherie »übercorrigirten» Aberration des Strahlenbündels von dem Begriffe der nicht corrigirten Aberration des äussersten Strahles streng zu scheiden.

Die in den meisten Augen vorhandene unbedeutende Asymmetrie bringt man am einfachsten in demjenigen Querschnitte des Strahlenbündels zur Anschauung, welcher die Evolutenspitze enthält. Wenn ich also, nachdem der leuchtende Punkt ausserhalb der Accommodationsstrecke versetzt worden ist, diese mit optischen Hilfsmitteln immer mehr hinausschiebe, bis ich deutlich einen hellen Punkt innerhalb des Zerstreuungskreises sehe, so finde ich diesen deutlich oberhalb der Mitte der Lichtfigur und auch — obwohl sehr unbedeutend — nasalwärts davon. Da die laterale Aberration der extremen Strahlen negativ ist, und das Netzhautbild umgekehrt projiciirt wird, so ist also das optische Centrum der Pupille etwas nach oben und unbedeutend nasalwärts vom anatomischen belegen. Wie ich schon erwähnt habe, kann ich die vertikale Componente der Asymmetrie schon im gewöhnlichen Lichtsternbild sehen, während die horizontale zu unbedeutend ist und erst bei diesem schärferen Versuche zu Tage tritt. Letztere halte ich für unmessber; was erstere betrifft, schätze ich die Proportion der auf den beiden Seiten des hellen Punktes belegenen Theile der vertikalen Symmetrielinie der Lichtfigur auf ungefähr 3 : 4 bei einer Pupille von 6 mm Diameter, was, da die laterale Aberration zur dritten Potenz des Abstandes in der Pupille proportional ist, einer Decentration von c:a $^1/_7$ mm als Wurzel der Gleichung $\left\{\frac{3-x}{3+x}\right\}^3 = \frac{3}{4}$ entspricht. Dieser Werth kann aber nicht sehr genau sein, da er bei so grosser Pupille ermittelt worden ist, dass die angeführte Gleichung höhere Potenzen enthalten müsste. Auch hätte es keinen Sinn, einen genauen Werth für diese Decentration zu suchen, da sich die Pupille nicht concentrisch erweitert und verengt. Wenn ich z. B., um eine kleinere Pupille zu erhalten, den Versuch im hellen Zimmer mache und dabe einen solchen Platz aufsuche, dass die Pupille bei Offenhalten des anderen Auges einen Diameter von 4 mm hat, so finde ich die horizontale Componente der Decentration mehr ausgeprägt als die vertikale, um nicht von der künstlichen Dilatation zu sprechen, bei welcher meine rechte Pupille am meisten in der Richtung nach oben und nasalwärts, die linke am meisten nach unten erweitert wird, und die fraglichen

Zerstreuungskreise die entsprechenden Phänomene zeigen. Wir finden, dass wir für die Messung der Asymmetrie nicht den Pupillenrand in Rechnung ziehen können. Dagegen können wir die Asymmetrie des Strahlenbündels in Bezug auf das Centrum der Linie $U = 0$ bestimmen, und in der That ist diese Asymmetrie, welche von der jeweiligen Lage des anatomischen Centrums vollkommen unabhängig ist, die für die Funktion des Auges einzig wichtige, da durch sie die Beschaffenheit der Evolute bestimmt wird. Wenn ich auf dieselbe Weise vorgehe wie bei der Messung der Aberration im horizontalen Hauptschnitte, dabei aber den letzten Querschnitt des Strahlenbündels suche, welcher nach oben, bezw. nach unten die Schnittlinie der Evolute erkännen lässt, so finde ich 4,5 bezw. 3,5 Dioptrien. Wenn wir nun den vertikalen Hauptschnitt als den zweiten bezeichnen und die Richtung nach oben als positiv rechnen, so finden wir, da der nach oben sichtbare Theil der Evolutenschnittlinie auf der Netzhaut nach unten belegen ist:

$$4{,}5 = -\frac{10\sigma_{\prime\prime}}{3} \cdot \frac{U_{\prime\prime}}{D^2} + \frac{\sigma^2_{\prime\prime}}{12} \cdot \frac{\Phi_{\prime\prime}}{D^3} \qquad 3{,}5 = \frac{10\sigma_{\prime\prime}}{3} \cdot \frac{U_{\prime\prime}}{D^2} + \frac{\sigma^2_{\prime\prime}}{12} \cdot \frac{\Phi_{\prime\prime}}{D^3}$$

d. h. für den der Linie $U = 0$ entsprechenden Werth $\sigma = 2$ die Werthe $\frac{U_{\prime\prime}}{D^2} = -0{,}075$ $\frac{\Phi_{\prime\prime}}{D^3} = 12$. Diese Werthe geben uns also die Beschaffenheit der Wellenfläche in dem mit dem Centrum der Linie $U = 0$ zusammenfallenden Punkte. Wenn wir die Decentration des optischen Centrums innerhalb dieser Linie suchen wollen, so haben wir nur, indem wir mit U_0 den Werth bezeichnen, welchen $U_{\prime\prime}$ in einem beliebigen Punkt auf der $s_{\prime\prime}$-Linie annimmt, in der Gleichung $U_0 = -0{,}075\, D^2 + 12\sigma_{\prime\prime} D^3$ die Bedingung $U_0 = 0$ einzuführen, woraus $\sigma_{\prime\prime} = 0{,}125$ mm resultirt. Wenn wir den von der Linie $U = 0$ begrenzten Bezirk als die *optische Zone* bezeichnen, so können wir entweder die geometrischen Eigenschaften der Wellenfläche auf das Centrum der optischen Zone beziehen oder auf das optische Centrum, wobei wir $\frac{\Phi_{\prime}}{D^3} = \frac{\Phi_{\prime\prime}}{D^3} = 12$ sowie $\frac{U_{\prime\prime}}{D^2} = -0{,}075$ bezw. für die Coordinaten des optischen Centrum, wenn das Centrum der optischen Zone Origo ist, $\sigma_{\prime} = 0$ $\sigma_{\prime\prime} = +0{,}125$ erhalten.

Die Erscheinungen, welche der *Astigmatismus* bei der Aberration eines normalen Auges und bei Abwesenheit von pathologischer Asymmetrie am gebrochenen Strahlenbündel verursacht, können mit Hilfe des leuchtenden Punktes untersucht werden, indem man das Auge durch Cylindergläser astigmatisch macht. Wie wir uns erinnern, theilt

sich dann der Kreispunkt auf der Wellenfläche in zwei solche, welche, auf einer Hauptkrümmungslinie belegen, sich bei steigendem Grade des Astigmatismus immer mehr von einander entfernen, und die beiden Schalen der Evolute schneiden einander in der Weise, dass die Kante der zweiten immer bei positiver Aberration weiter von der Wellenfläche entfernt ist als die der ersten. Es müssen also die den um einen leuchtenden Punkt sichtbaren Strahlen entsprechenden negativen Evolutenkanten eine ähnliche Erscheinung in dem von der Wellenfläche am weitesten abliegenden der beiden dünnsten Querschnitte des Strahlenbündels verursachen. Von den übrigen durch die Evolutenkanten bedingten Erscheinungen können wir nur von vornherein sagen, dass die in einem gewöhnlichen Strahlenbündel, dessen Brennstrecke von derselben Grössenordnung ist wie der Diameter der Begrenzungslinie, vorkommenden verschiedenartigen Zerstreuungsfiguren durch die Kantenbildungen auf den Evoluten zerklüftet sein müssen d. h. abwechselnd helle und dunkle Linien aufweisen müssen, deren Anordnung nicht mit unseren Hilfsmitteln vorausgesagt werden kann. Und in der That, nachdem wir diese Bemerkung der S. 159 gegebenen Beschreibung von solchen Strahlenbündeln hinzugefügt haben, finden wir bei den Versuchen mit Cylindergläsern nichts wesentliches über die Constitution des im normalen Auge mit artificiellem Astigmatismus gebrochenen Strahlenbündels hinzuzufügen. Wenn ich vor mein rechtes Auge ein Cylinderglas von 5 D. halte, so dürfen, wie wir wissen, Schnittlinien beider Evoluten nicht auf einem und demselben Querschnitte des Strahlenbündels vorkommen. Das ist auch nicht der Fall, sondern die beiden Evoluten passiren in der gewöhnlichen Serie der Querschnitte nach einander Revue, und das Strahlenbündel besitzt in Uebereinstimmung hiermit wirklich zwei »dünnste» Querschnitte. Wenn ich aber das Auge 4 D. astigmatisch mache, so finde ich auf dem letzten Querschnitte, welcher die Schnittlinie der zweiten Schale zeigt, schon die Kante der ersten. Je geringer der künstliche Astigmatismus ist, um so breiter wird der der Wellenfläche am nächsten liegende »dünnste» Querschnitt, während der andere nicht so sehr breiter wird, aber immer mehr die für die gewöhnliche Sternfigur charakteristischen Strahlen in der dieser zukommenden Anordnung aufweist. Die bei geringem Astigmatismus im Strahlenbündel vorhandenen Fokalpunkte der beiden Kreispunkte der Wellenfläche kann man wegen der Zerklüftung durch die Kantenbildung nicht so gut beobachten, erkennt sie aber an dem pfeilspitzenähnlichen Aussehen der Spitzen auf der geschlossenen Schnitt-

linie der Evolute in dem fraglichem Querschnitte, welches durch die einander berührenden Spitzen beider Schalen entsteht und bei dem im Cap. 4 erwähnten Versuchen mit Linsen auch sehr deutlich zu Tage tritt. Als Zeichen des Vorhandenseins der schon untersuchten Asymmetrie der Evolute in vertikaler Richtung finde ich, wenn ich dem Auge einen direkten Astigmatismus gebe, dass der Uebergang der die Kante der zweiten Schale andeutenden Linie zu einer geschlossenen Curve nicht in der Mitte beginnt, und dass der untere Theil der Schnittlinie der ersten Evolute bei gewisser sphärischer Correction nicht mehr wahrgenommen werden kann, während der obere Theil noch gut sichtbar ist.

Es ist klar, dass die bei anastigmatischer Correction angewendeten Methoden, die Asymmetrie und die Aberration in den beiden Hauptrichtungen zu messen, auch bei astigmatischer angewendet werden können, da sie in keiner Weise von der Differenz der Hauptkrümmungen der Wellenfläche abhängen. Aber ausserdem bekommen wir hier eine Methode, welche die bei ungenügender Beherrschung der Accomodation vorhandene Fehlerquelle ausschliesst, indem wir nur das stärkste Cylinderglas zu suchen haben, mit welchem noch auf einem und demselben Querschnitte des Strahlenbündels Schnittlinien beider Evoluten zu sehen sind. Diese Untersuchung ist bei artificiellem direktem und inversem Astigmatismus zu machen, und der Grad des Astigmatismus, welchen das Auge mit der fraglichen Correction aufweist, ergiebt, wie leicht einzusehen ist, unmittelbar den Refractionsunterschied zwischen optischem Centrum und dem entsprechenden Theile der Linie $U = 0$. Bei direktem artificiellem Astigmatismus erhält man die Aberration im horizontalen, bei inversem im vertikalen Hauptschnitte.

Das verschiedene Verhalten der beiden dünnsten Querschnitte bedingt die so oft bei der klinischen Untersuchung des Astigmatismus zu constatirende Thatsache, dass nur die mit dem stärkstbrechenden Hauptschnitte parallele Linie der Sternfigur, welche zur Untersuchung angewendet wird, mehr markirt erscheint als die anderen, so dass der Astigmatismus in manchen Fällen überhaupt nicht entdeckt werden kann, wenn nicht das Auge bei Anwendung der Sternfigur etwas myopisch gemacht wird, eine Thatsache, für welche bisher bei Abwesenheit von pathologischer Asymmetrie keine befriedigende Erklärung gegeben werden konnte, obwohl sie dem gewissenhaften Ophthalmologen längst bekannt ist.

Es leuchtet ein, dass wir erst nach erworbener Kenntniss von der Constitution des im normalen Auge gebrochenen Strahlenbündels zu einer fruchtbringenden Untersuchung pathologischer Fälle schreiten können. Auf dieses Gebiet soll jedoch hier nicht näher eingegangen werden, sondern es mag hinreichend sein, zu erwähnen, dass solche Grade von Asymmetrie, dass die Evolute keine Spitze innerhalb der optischen Zone hat, nicht selten sind, und betreffs der klinischen Bedeutung dieser Asymmetrien auf meine früheren Untersuchungen zu verweisen. Interessant ist es, dass Tscherning selbst, welcher mit so grossem Fleisse die Aberrationen des Auges studirt hat, und unter dessen Leitung die meisten hierher gehörigen Untersuchungen ausgeführt worden sind, ein Auge mit so grosser vertikaler Asymmetrie hat, dass die Evolute keine Spitze aufweist. Der Grad des Astigmatismus ist auch, wie es aus den Zeichnungen hervorgeht, die er von den Querschnitten des im Auge gebrochenen Strahlenbündels publicirt hat, ein derartiger, dass die Wellenfläche innerhalb der optischen Zone einen Kreispunkt hat, dessen Fokalpunkt man an dem pfeilspitzenähnlichen Aussehen einer der Lichtfiguren erkennt. Es ist erklärlich, dass es Tscherning nicht gelingen konnte, die fraglichen Figuren vollständig zu deuten, da dies erst mit Hilfe der hier entwickelten Theorie der monochromatischen Aberrationen geschehen kann, aber anderseits hat er sich durch theilweise Verdeckung der Pupille eine hinreichende Kenntniss vom Strahlenbündel verschafft, um eine nach unten concave Evolutenlinie für den vertikalen Hauptschnitt richtig zu construiren.

Von den Mitteln, welche zur Untersuchung der Aberrationen des Auges angewendet worden sind, spielt die theilweise Verdeckung der Pupille eine hervorragende Rolle. In diese Categorie gehören nämlich nicht nur die soeben angedeuteten Hilfsmittel bei der Untersuchung mit dem leuchtenden Punkte, sondern auch die auf den Scheiner'schen Versuch basirten und ähnlichen Methoden. Von diesen stellt wohl die mit dem Optometer von Young die grössten Ansprüche an die Beherrschung der Accommodation. Dagegen liefert die auch von Young angewendete Methode, den Schatten eines linearen Gegenstandes auf der Netzhaut zu untersuchen, in der Form des Aberroskopes von

Tscherning[1] eine Methode, bei welcher die Erschlaffung der Accommodation nicht nöthig ist. Das kleine Instrument besteht bekanntlich aus einer planconvexen Linse — in meinem Exemplar 4 D. — mit einem rectangulären Liniennetze auf der ebenen Fläche, welche bei der Untersuchung vor das Auge gehalten wird, so dass die durch eine punktförmige Lichtquelle entworfenen Schatten der Linien auf die Netzhaut fallen und im Zerstreuungskreise des leuchtenden Punktes sichtbar werden. Nach Angabe des Verf. soll die Distanz der Linse vom Auge 10 bis 20 cm sein, und eine nach der Mittellinie zu convexe Gestalt der Schatten giebt positive, eine concave negative Aberration im fraglichen Hauptschnitte an, während bei gewisser Aenderung der Correction das Umgekehrte stattfindet.

Da die Untersuchungen mit dem Aberroskop theilweise als Basis für die Tscherning'sche Accommodationstheorie dient, deren Widerlegung oder Bestätigung eine wichtige Aufgabe der modernen Ophthalmologie sein muss, so wollen wir als ein weiteres Ergebniss für die Ophthalmologie die bisher unbekannte *Theorie des Aberroskopes* und ähnlicher auf die Gestalt der Schatten linearer Gegenstände auf der Netzhaut gegründeten Untersuchungsmethoden der Aberration in aller Kürze entwickeln.

Schon ein flüchtiges Nachdenken lehrt, dass bei Abwesenheit von Aberration des gebrochenen Strahlenbündels die Schatten im allgemeinen Falle nicht ohne Krümmung sein können. Wenn wir uns beispielsweise an das reducirte Auge halten, und das durch die Linse des Aberroskopes gebrochene Strahlenbündel als aberrationsfrei ansehen, so bilden die Schatten auf der brechenden Fläche einfach gekrümmte Linien, welche in Ebenen liegen, die sich in dem durch die Convexlinse entworfenen Bilde des leuchtenden Punktes schneiden. Falls aber die Schatten auf der hinteren Fokalebene des reducirten Auges linear sein sollen, wenn das gebrochene Strahlenbündel homocentrisch ist, so müssen sich diese Ebenen in dem durch das von Linse und Auge zusammengesetzte System entworfenen Bilde des leuchtenden Punktes schneiden, was also unmöglich ist, wenn nicht der Bildpunkt nach Brechung in der Aberroskoplinse mit dem Krümmungsmittelpunkt der brechenden Fläche des reducirten Auges zusammenfällt.

In voller Uebereinstimmung hiermit finden wir unter Anwendung der Formeln S. 170 und mit denselben Bezeichnungen:

[1] Optique physiologique, Paris 1898, S. 96 u. Arch. d'Ophth. XIII, S. 615. 1893.

$$d^3\xi = \left\{ \frac{3(\mu_, - \mu)}{\mu_,} r_{,,}(r_{,,} - r)(1 - \zeta r_,) - \zeta \Phi' \right\} da^3 +$$

$$+ 3 \left\{ \frac{\mu_, - \mu}{\mu_,} t_{,,}(r_{,,} - r)(1 - \zeta r_,) - \zeta \Omega'' \right\} da\,db^2,$$

wobei also ein Strahl, welcher vor der Brechung die Tangentialebene im Punkte $x = a \quad y = b$ schneidet, nach der Brechung durch den Punkt $\xi\,\eta\,\zeta$ geht. Wir sehen unmittelbar theils, dass die Krümmung der Schattenlinien, welche dem Differentialquotienten $\frac{\partial^3 \xi}{\partial a \partial b^2}$ direkt proportional ist, nichts mit der direkten Aberration im betreffenden Hauptschnitte des gebrochenen Strahlenbündels zu thun hat, sondern von der transversalen abhängt, theils aber auch dass diese Krümmung ausserdem von einer anderen Grösse beeinflusst wird, welche von den Aberrationswerthen völlig unabhängig ist, und welche nur dann gleich Null sein kann, wenn entweder $\zeta = \frac{1}{r_,}$ oder $r_{,,} = r$ ist. Die erste dieser Bedingungen entspricht aber dem Falle, dass der leuchtende Punkt auf der Netzhaut abgebildet wird, wobei die Zerstreungskreise nicht zur Beobachtung der Linienschatten ausreichen, und die zweite besagt, dass das von der Aberroskoplinse entworfene Bild des leuchtenden Punktes im Krümmungsmittelpunkt der brechenden Fläche liegt, was durch die angegebene Versuchsanordnung ausgeschlossen ist. Es kann also die Aberration des gebrochenen Strahlenbündels im reducirten Auge niemals gleich Null sein, wenn die Linienschatten ohne Krümmung sind. Und trotzdem ist das Instrument, wie wir sehen werden, für praktische Zwecke sehr anwendbar.

Wo die Form der brechenden Flächen nicht wesentlich von der einer Umdrehungsfläche abweichen, d. h. bei Abwesenheit von absehbarer Asymmetrie sowie astigmatischer oder diagonalastigmatischer Aberration, beträgt, wie wir wissen, die direkte Aberration das Dreifache der transversalen, und das Instrument ist also für diese Fälle anwendbar, wenn der Einfluss der Grössen, welche ausser den Aberrationswerthen des gebrochenen Strahlenbündels auf die Krümmung der Linienschatten einwirken, ausgeschlossen werden kann. Wenn wir nun die Formel auf das schematische Auge anwenden, so zeigt es sich, dass für jede der drei brechenden Flächen das Produkt $t_{,,}(r_{,,} - r)$ positiv ist, während $\mu_, - \mu$ für die hintere Linsenfläche negatives, für die beiden übrigen positives Vorzeichen hat. Was die Coefficienten

$1 - \zeta r$, betrifft, so haben die den beiden ersten Flächen entsprechenden positive Werthe, während für die hintere Linsenfläche dieser Coefficient negativ ist, da für die beiden ersten Brechungen ζ gleich dem Abstande zur nächsten brechenden Fläche, für die letzte aber grösser als der Abstand zum hinteren Bildpunkte der Lichtquelle ist. Da bei jeder Brechung eine Grösse resultirt, welche ausser dem Aberrationswerthe des gebrochenen Strahlenbündels auf die Krümmung der Linienschatten einwirkt, und alle drei Grössen mit dem letzten der Coefficienten $1 - \zeta r$, zu multipliciren sind, so finden wir, dass von diesen drei Grössen die bei der Brechung in der hinteren Linsenfläche resultirende entgegengesetztes Vorzeichen gegenüber den beiden anderen hat, wonach eine Ausgleichung im Auge möglich ist. Allgemein erhalten wir, wenn wir mit $a_n\, b_n$ die Coordinaten des Punktes bezeichnen, durch welchen der fragliche Strahl nach der Brechung in der letzten Fläche eines centrirten Systemes die Tangentialebene dieser Fläche schneidet, und die Werthe $r_n\, \Phi'\, \Omega''$ auf die dieselbe Ebene tangirende Wellenfläche des gebrochenen Strahlenbündels beziehen, die Gleichung:

$$d^3\xi = (\ldots)\,da^3 + 3\left\{(1 - \zeta r_n)\frac{\partial^3 a_n}{\partial a \partial b^2} - \zeta\Omega''\frac{da_n}{da}\cdot\left(\frac{db_n}{db}\right)^2\right\}da\,db^2$$

Wenn wir nun bei einem constanten Werthe von ζ die Coordinaten $\xi\,\eta$ als Funktionen von a und b betrachten, so erhalten wir für eine b-Linie in der fraglichen Ebene:

$$\frac{d}{d\xi}\frac{d^2\xi}{d\eta^2} = \frac{\partial^3\xi}{\partial a \partial b^2} : \left[\frac{d\xi}{da}\left(\frac{d\eta}{db}\right)^2\right];$$

und wenn wir weiter die Krümmung der Schattenlinien als positiv bezeichnen, wenn die nächstliegenden Linien ihre convexe Seite der geraden Mittellinie zuwenden, wonach diese Krümmung für die b-Linien dasselbe Verzeichen wie der Differentialquotient $\frac{d}{d\xi}\frac{d^2\xi}{d\eta^2}$ hat, so finden wir, da bei der Untersuchung des Auges mit dem Aberroskop ζ und $\frac{da_n}{da}$ positiv sind, und $\frac{d\xi}{da} = (1 - \zeta r_n)\frac{da_n}{da}$ ist, dass von den zwei diese Krümmung bestimmenden Grössen die eine dasselbe Vorzeichen wie $\frac{\partial^3 a_n}{\partial a \partial b^2}$, die andere dasselbe wie das Produkt $\Omega''(\zeta r_n - 1)$ hat. Wie wir gesehen haben, kann erstere verschwinden, aber für eine Berechnung, ob dies im Auge geschieht oder nicht, können wir nicht das

schematische Auge anwenden, da der in der Linse variirende Brechungsindex kaum ohne Einfluss hierauf sein kann. Dagegen finden wir eine praktische Probe, ob diese Grösse neben dem Aberrationswerthe von Einfluss auf das Untersuchungsresultat ist, darin, dass bei einem Zeichenwechsel von $\zeta r_n - 1$ die eine Grösse das Vorzeichen ändert, die andere nicht. Eine Aenderung des Vorzeichens von $\zeta r_n - 1$ bei der Untersuchung mit dem Aberroskope ist aber gleichbedeutend mit dem Vorhalten einer Concavlinse von genügender Stärke, um den Bildpunkt des leuchtenden Punktes hinter die Netzhaut zu verlegen. Es ergiebt sich also die Regel, dass *das Vorzeichen der transversalen Aberration des im Auge gebrochenen Strahlenbündels durch die Untersuchung mit dem Aberroskope gefunden werden kann, wenn die Krümmung der Schattenlinien das Vorzeichen wechselt, je nachdem das Bild des leuchtenden Punktes vor oder hinter der Netzhaut fällt.* Da dies für das menschliche Auge die Regel zu sein scheint, so kann bei Abwesenheit von pathologischer Asymmetrie das Vorzeichen der Aberration mit dem Instrumente erhalten werden — es wäre denn, dass die direkte und die transversale Aberration verschiedenes Vorzeichen hätten, was aber, wenn überhaupt solche Fälle vorkommen, ausserordentlich selten sein muss. Der Vorsicht halber ist es aber immer das beste, die Controle mit dem erforderlichen Concavglase vorzunehmen.

Die oben angewendete Formel ist unter der Bedingung hergeleitet, dass eine b-Linie ohne Krümmung sei. Ist dies nicht der Fall, so haben sämmtliche diese Linien im Zerstreuungskreise auf der Netzhaut dasselbe Vorzeichen der Krümmung, und das Aberroskop giebt die transversale Asymmetrie des gebrochenen Strahlenbündels im fraglichen Hauptschnitte. Nach derselben Methode, nach welcher wir die oben angewendete Formel deducirt haben, finden wir nämlich allgemein für die den Hauptstrahl schneidende b-Linie:

$$\frac{d^2\xi}{d\eta^2} = \left\{(1-\zeta r_n)\frac{\partial^2 a_n}{\partial b^2} - \zeta W\left(\frac{db_n}{db}\right)^2\right\} : \left(\frac{d\eta}{db}\right)^2$$

wonach wieder die Krümmung der Schattenlinien durch zwei Grössen bestimmt werden, von denen die eine mit dem Coefficienten $1-\zeta r_n$ das Vorzeichen wechselt, die andere nicht. Hier ist aber letztere zur transversalen Asymmetrie des gebrochenen Strahlenbündels direkt proportional, während erstere von der Asymmetrie vor der letzten Brechung und von der Incidens bei dieser[1] abhängt. Es ergiebt sich also

[1] Vergl. Beitrag zur Theorie des Astigmatismus S. 327, Formeln *E!*

die Regel, *dass die transversale Asymmetrie dem Vorzeichen nach bei der Untersuchung mit dem Aberroskop bestimmt werden kann, wenn die Krümmung der centralen Schattenlinie dasselbe Vorzeichen hat, das Bild des leuchtenden Punktes mag vor oder hinter der Netzhaut fallen.*

Auch niedrige Grade von Asymmetrie können auf diese Weise diagnosticirt werden. So giebt das Aberroskop für mein rechtes Auge eine Schattenfigur, deren Linien die convexe Seite dem Centrum zuwenden, aber während dies für die vertikalen Linien genau stimmt, so liegt diejenige horizontale Linie, welche ohne Krümmung ist, deutlich oberhalb der Mitte. Setze ich aber ein passendes Concavglas vor das Auge — je nach dem Abstande des leuchtenden Punktes — so kehren die Linien die concave Seite der Mitte zu, und diejenige horizontale Linie, welche ohne Krümmung ist, liegt deutlich unterhalb der Mitte. Es hat also in beiden Fällen die dem Centrum des Zerstreuungskreises entsprechende horizontale Linie nach unserer Bezeichnung negative Krümmung. Da die Krümmung der Linie auf der Netzhaut entgegengesetztes Vorzeichen hat, und die transversale Asymmetrie im vertikalen Hauptschnitte wiederum gegenüber dieser entgegengesetztes, so hat also $W_{\prime\prime}$ für den centralen Strahl negatives Vorzeichen.

In wie weit man allgemein von dem Vorzeichen der transversalen Asymmetrie auf das der direkten schliessen darf, können erst weitere klinische Untersuchungen lehren, obwohl es a priori zu vermuthen ist, dass die beiden gewöhnlich dasselbe Vorzeichen haben, weil die Asymmetrien gewöhnlich durch Decentrationen der brechenden Flächen oder der Pupille entstehen, und die bei schiefer oder excentrischer Incidenz in Linsen gebrochenen Strahlenbündel, wie meine früheren Untersuchungen beweisen, am häufigsten dasselbe Vorzeichen für die transversale wie für die direkte Asymmetrie haben.

Mit diesen Beschränkungen liefert also das Aberroskop verwerthbare Untersuchungsresultate, und mit den angegebenen Vorsichtsmassregeln angewendet, ist die fragliche Methode nächst der mit einem leuchtenden Punkte die beste von den subjektiven Untersuchungsmethoden der Asymmetrie und der Aberration des Auges. Ohne irgend eine Beschränkung würden die Resultate gelten, wenn das Instrument hinter der hinteren Linsenfläche applicirt werden könnte.

Neben diesen Methoden giebt es auch objektive, welche theils auf der direkten *Untersuchung der Refraction mit dem Augenspiegel durch verschiedene Theile der Pupille hindurch,* theils auf den bei der skiaskopischen Untersuchung zu Tage tretenden Erscheinungen basiren.

Von diesen scheint erstere zu wenig beachtet zu sein. Wenn das Spiegelloch nicht mehr als 1,5 bis 2 mm Durchmesser hat, so kann man bei nicht zu enger Pupille sehr gut die Refraction durch verschiedene Theile dieser hindurch im direkten Bilde bestimmen, ohne dass das Resultat durch den stenopäischen Effect des Loches unsicher wird. Hierbei ist es aber nicht gleichgiltig, welche Details im Augengrunde Gegenstand der Refractionsbestimmung sind. Je mehr sich das im Auge gebrochene Strahlenbündel dem in centrirten, aus Umdrehungsflächen zusammengesetzten Systemen gebrochenen nähert, um so näher der Wahrheit kommt der Satz, dass die direkte Refractionsänderung dreimal so gross ist als die transversale. Es muss also jene, d. h. die Refraction des radiären Hauptschnittes innerhalb des fraglichen im Pupillargebiete decentrirten Diaphragmas, Gegenstand der Untersuchung sein, wenn der Ausschlag grösst möglich sein soll. Wenn wir z. B. den vertikalen Hauptschnitt des Auges untersuchen wollen, haben wir ein kleines horizontales Gefäss am temporalen Papillenrande auszuwählen und die Aenderung der Refraction bei grösstmöglicher Verschiebung des Spiegels nach oben und nach unten zu untersuchen, wobei aber genau darauf zu achten ist, dass keine Verschiebung des Spiegels zur eigenen Pupille stattfindet. Auch kann der entstehende Astigmatismus und die dadurch verursachte Formveränderung der Papille unserem Zwecke dienen. Da nämlich immer der radiäre Hauptschnitt verhältnissmässig stärker brechend als der tangentiale bei Zunahme der Refraction wird, so gilt die Regel, dass wenn bei einer Verschiebung die Papille in derselben Richtung relativ mehr ausgedehnt erscheint, in welcher die Verschiebung stattgefunden hat, bei dieser eine Refractionszunahme constatirt worden ist und vice versa. Zwar gelingt es nicht immer die physiologische Aberration mit diesen Methoden nachzuweisen, was sicher seine Ursache darin hat, dass die Stelle der grössten Refraction so wenig vom Centrum entfernt ist, und dass die transversale Asymmetrie, welche an dieser Stelle nicht wie die direkte verschwindet, Unschärfe verursacht. Dagegen gelingt es oft zu constatiren, dass diese Unschärfe bei Decentration des Spiegelloches zuerst zunimmt, um dann wieder abzunehmen, wie es unsere Kenntniss von dem gebrochenen Strahlenbündel fordert. Uebrigens

kann man bei gut dilatirter Pupille sehr oft die der positiven Aberration eigenthümliche relative Ausdehnung des zur Verschiebungsrichtung parallelen Papillendiameters constatiren. Aber wenn die Aberration einen ungewöhnlich hohen Grad erreicht, wie es bisweilen mit der positiven der Fall ist, oder wenn eine ausgeprägte negative Aberration vorhanden, wie z. B. bei der vor der Trübung der Linse auftretenden Staarmyopie, oder wenn eine ausgeprägte pathologische Asymmetrie vorliegt, können diese Methoden immer angewendet werden, und die eine ergiebt einen Refractionsunterschied von mehreren Dioptrien, die andere zeigt deutliche Formveränderung der Papille.

Natürlich erhalten wir gleichwohl nicht mit Sicherheit die Aberration innerhalb der optischen Zone auf diese Weise. Es kann nämlich sehr wohl hier eine positive Aberration vorhanden sein, obwohl die periphersten Strahlen den centralen jenseits des Fokalpunktes schneiden, wobei diese Untersuchung negative Aberration ergeben muss. Was wir finden, ist also nur ein Ausdruck für die Relation zwischen den centralen und den periphersten Strahlen. Diese Relation ist es, die man bisher unter dem Namen der sphärischen Aberration des Auges verstanden hat. Nun kann aber — ich habe es eben bei einer fünfunddreissigjährigen Dame mit normalen Augen gefunden — diese Aberration negativ sein, während sowohl die Untersuchung der Evolute mit dem leuchtenden Punkte wie die Untersuchung mit dem Aberroskope positive Aberration innerhalb der optischen Zone angeben. Wir müssen also die Aberration innerhalb der optischen Zone, welche allein für die Funktion des Auges Bedeutung hat, und welche im normalen Auge, so weit ich bisher gefunden habe, positiv ist, von der »sphärischen Aberration des Auges«, welche unter normalen Verhältnissen positiv oder negativ sein kann, streng unterscheiden. Um nun Missverständnissen vorzubeugen, brauchen wir den Ausdruck Aberration schlechtweg nur für die Aberration innerhalb der optischen Zone und bezeichnen die dem bisherigen Ausdrucke sphärische Aberration des Auges zu Grunde liegende Relation zwischen den centralen und den periphersten Strahlen als *periphere Totalaberration.* Nur diese können wir mit der objektiven Untersuchungsmethode finden.

Dass bei ungleichmässiger Dilatation der Pupille auch ähnliche Unterschiede zwischen den Untersuchungsbefunden wie bei Asymmetrie vorkommen können, ist offenbar. Da aber bei der pathologischen Asymmetrie die vom Centrum aus eintretende Refractionsänderung in den beiden entgegengesetzten Richtungen des fraglichen Hauptschnittes

ungleiches Vorzeichen hat, so dürfte wohl die objektive Untersuchung in Praxi nicht betrügen können, wenn die Resultate bei erheblich ungleichmässiger Dilatation der Pupille vorsichtig aufgefasst werden, um so mehr da der Refractionsunterschied oft ohne künstliche Dilatation wahrgenommen werden kann.

Auch die *Untersuchung der Aberration mittels der skiaskopischen* Phänomene giebt nur die periphere Totalaberration, wie es u. A. der eben erwähnte Fall beweist, da hier auch diese Methode die für die negative periphere Totalaberration charakteristischen Erscheinungen in typischer Form gab. Ich begnüge mich mit der Feststellung dieser Thatsache, da es zu weit führen würde, hier auf die verschiedenen Erscheinungen näher einzugehen.

Betreffs der *Aenderung der Aberration während der Accommodation,* welche Aenderung eine der Stützen der neuen Tscherning'schen Accommodationstheorie ist, will ich zunächst constatiren, dass in einigen Fällen mittels der skiaskopischen Methode ohne Schwierigkeit festgestellt werden kann, dass die periphere Totalaberration bei Einstellung mittels der Accommodation negatives Vorzeichen hat, während bei Einstellung auf denselben Abstand mittels einer Convexlinse dies nicht nachzuweisen ist. Wenn man seiner Untersuchung einigen Werth beilegen will, darf man diesen Vergleich niemals versäumen, da man, wie wir gesehen haben, nicht von der Annahme ausgehen kann, die periphere Totalaberration sei immer positiv im normalen Auge. Dass nicht die positive Aberration innerhalb der optischen Zone bei der Accommodation das Vorzeichen wechselt, wird sehr leicht dadurch constatirt, dass man, wenn der leuchtende Punkt bis in die Nähe des Nahepunktes hineingerückt wird, bei der Fixation immer zuerst die Schnittlinie der Evolute zu sehen bekommt, welche erst nach weiterer Anstrengung der Accommodation der gewöhnlichen Sternfigur bezw. bei nicht dilatirter Pupille dem scharfen Bilde Platz macht. Auch mit dem Aberroskope tritt in der Regel nach meiner Erfahrung keine Aenderung der Krümmung der Schattenlinien während der Accommodation ein, wenn die Untersuchung unter Vermeidung gewisser Fehlerquellen vorgenommen wird. Man darf nicht glauben, es könnte beweisend sein, wenn man bei der gewöhnlichen Untersuchung mit dem Aberroskop die po-

sitive Krümmung constatirt hat, dann eine Accommodationsanstrengung macht und dabei findet, dass die Linien weniger gekrümmt erscheinen. Dies rührt nämlich davon her, dass die Krümmung, wie aus den Formeln hervorgeht, und wie Tscherning selbst angiebt, weniger deutlich wird, wenn das Bild des leuchtenden Punktes von der Netzhaut entfernt wird. Man kann sich auch leicht überzeugen, dass dieselbe Erscheinung zu Tage tritt, wenn die Einstellung für die Nähe nicht durch die Accommodation, sondern durch eine aequivalente Convexlinse zu Stande kommt. Eine ähnliche Fehlerquelle liegt im Vergrössern des Abstandes des Aberroskopes von dem Auge. Um den Versuch einwandsfrei zu machen, muss man also bei Emmetropie, die nöthigenfalls durch Gläsercorrection zu erzielen ist, in gewöhnlicher Weise die Zeichen der positiven Aberration constatiren, dann bei Vorsetzung von immer stärkeren Concavgläsern bezw. bei entsprechender Aenderung der früheren Correction accommodiren lassen, wobei das Aberroskop unmittelbar vor das Correctionsglas gehalten wird. Sollte dann bei der Accommodation successive eine positiv gekrümmte Schattenlinienfigur, dann der Lichtpunkt und schliesslich bei maximaler Anstrengung der Accommodation eine negativ gekrümmte Schattenlinienfigur erscheinen — Alles mit einer und derselben Correction und ohne Aenderung des Abstandes des Aberroskopes vom Auge — dann freilich wäre mit dieser Methode eine Veränderung der Aberration während des Accommodationsactes im fraglichen Falle bewiesen.

Nach meinem Dafürhalten kann man also betreffs der Aenderung der Aberration während dem Accommodationsacte bis auf Weiteres mit Bestimmtheit nur sagen, dass die periphere Totalaberration in gewissen Fällen negativ wird, ohne dass es möglich ist, für die übrigen Fälle eine Veränderung zu constatiren, und ohne dass eine Veränderung der Aberration innerhalb der optischen Zone bewiesen wäre. Ob also diese Aenderung der Aberration für die Physiologie oder möglicherweise für die Pathologie der Accommodation ihre eigentliche Bedeutung hat, scheint zur Zeit dahingestellt werden zu müssen. Dass sie jedenfalls von eminenter Bedeutung ist, unterliegt wohl keinem Zweifel.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich erwähnen, dass die durch die Schwere erfolgende Decentration der Linse während des Accommodationsactes bei der Untersuchung mit dem leuchtenden Punkte constatirt werden kann. Wenn ich nämlich unter Vorhalten von Concavgläsern verschiedener Stärke accommodire und ein Glas aufsuche, welches bei maximaler Accommodation die Evolutenspitze noch auf

die Netzhaut zu bringen zulässt, so finde ich, dass immer der entsprechende helle Punkt unabhängig von der Haltung des Kopfes nach oben im Zerstreuungskreise decentrirt ist. Ich kann auf diese Weise die Asymmetrie im vertikalen Meridiane des rechten Auges das Vorzeichen wechseln lassen. Wie aber diese Decentration zu Stande kommt, ob durch Hinuntersinken der Linse oder durch Drehung um eine horizontale Achse, das kann nicht durch diesen Versuch entschieden werden.

Dass bei verschiedener Aberration in den beiden Hauptrichtungen der Astigmatismus der Aberration im anastigmatischen Strahlenbündel die Erscheinungen eines mit der Pupillengrösse wechselnden Astigmatismus hervorrufen muss, ist schon erwähnt. Um den Grad dieses Astigmatismus zu finden, haben wir uns nur zu erinnern, dass der dünnste Querschnitt eines Strahlenbündels ohne Asymmetrie, sei es astigmatisch oder nicht, auf einem Abstande von der Evolutenspitze des betreffenden Hauptschnittes gelegen ist, welcher gleich $^1/_4$ der Projektion der Evolute auf dem Hauptstrahle ist. In der Rechnung S. 176 haben wir also nur den Werth von ζ mit 4 zu dividiren, um die den dünnsten Querschnitten entsprechenden Dioptrienwerthe zu finden. Der Grad des durch die astigmatische Aberration bei einer bestimmten Pupillengrösse vorgetäuschten Astigmatismus ist demnach gleich $^1/_4$ des Unterschiedes zwischen der Refraction am Rande der Pupille bezw. der optischen Zone in den beiden Hauptrichtungen. Wenn z. B. ein Auge, das bei minimaler Pupille keinen Astigmatismus aufweist, mit einer optischen Zone von 4 mm Durchmesser $\frac{\Phi_{\prime}}{D^3} = 12$ $\frac{\Phi_{\prime\prime}}{D^3} = 6$ hätte, so würde bei einer Pupille von 4 mm Diameter ein inverser Astigmatismus von 0,5 D. bei der Untersuchung gefunden werden, und das entsprechende Glas würde bei dieser Pupillengrösse Erleichterung schaffen, während es bei kleinerer Pupille nicht von Vortheil sein würde. In wie weit die astigmatische Aberration Schuld ist an dieser nicht selten zu constatirenden Erscheinung, bin ich nicht in der Lage entscheiden zu können. Dieselbe Erscheinung kann nämlich, wie ich früher gezeigt habe, durch Asymmetrie des gebrochenen Strahlenbündels hervorgerufen werden, und da diese nur eine leicht auszu-

führende objektive Untersuchung erfordert, während die Untersuchung des Astigmatismus der Aberration nicht so oft gemacht werden kann, theils weil sie grössere Ansprüche an das Urtheil des Kranken stellt, und theils weil man relativ selten in der Lage ist, so zeitraubende Untersuchungen in der Sprechstunde auszuführen, habe ich erklärlicherweise hinreichendes Material zur Beantwortung dieser Frage nicht sammeln können.

Ob ein mehr als theoretisches Interesse dem Diagonalastigmatismus der Aberration zukommt, ist wohl zweifelhaft. In wissenschaftlicher Hinsicht giebt aber dieser Zustand die volle Erklärung der nicht selten zu beobachtenden Erscheinung, dass nach Correction des Astigmatismus der Kranke in keiner Weise mehr als die beiden den Hauptschnitten entsprechenden Linien auf der zur Untersuchung angewendeten Sternfigur scharf sehen kann.

Berichtigungen.

Leider habe ich, ausser unmittelbar verständlichen Druchfehlern, folgende zu berichtigen:

S.	14	Z.	15	lies	$\frac{1}{T_,} \cdot \frac{d\varrho'}{ds_,}$	statt	$\frac{1}{T_,} \cdot \frac{d\varrho_,}{ds_,}$
»	39	»	9	»	$d^2\xi = -R'dp^2$	»	$d^2\xi = R'dp^2$
»	»	»	12	»	$2R'' \operatorname{tg} \vartheta_{,,}$	»	$2R' \operatorname{tg} \vartheta_{,,}$
»	44	»	6	»	$\frac{WK}{D_,(D_, - D_{,,})}$	»	$\frac{VW}{D_,(D_, - D_{,,})}$
»	65	»	30	»	$T = \frac{b}{a}$	»	$T = \frac{b}{a}$
»	67	»	16	»	$\frac{\partial^{31}}{2u - 3w}$	»	$\frac{\partial^{31}}{3u - 3w}$
»	70	»	12	»	$d\xi$	»	$d\zeta$
»	73	»	18	»	$\zeta - z$	»	ζ
»	79	»	16	»	$9\Omega^3\xi^2$	»	$9^3\Omega\xi^2$
»	82	»	5	»	$\frac{dR_t}{ds}$	»	$\frac{dR}{ds}$
»	95	»	2	»	$\frac{dR_t}{ds}$	»	$\frac{dR_s}{ds}$
»	140	»	9	»	$\Phi_{,,,}$	»	$\Phi_{,,,}'$



